√-1 в физике и технике

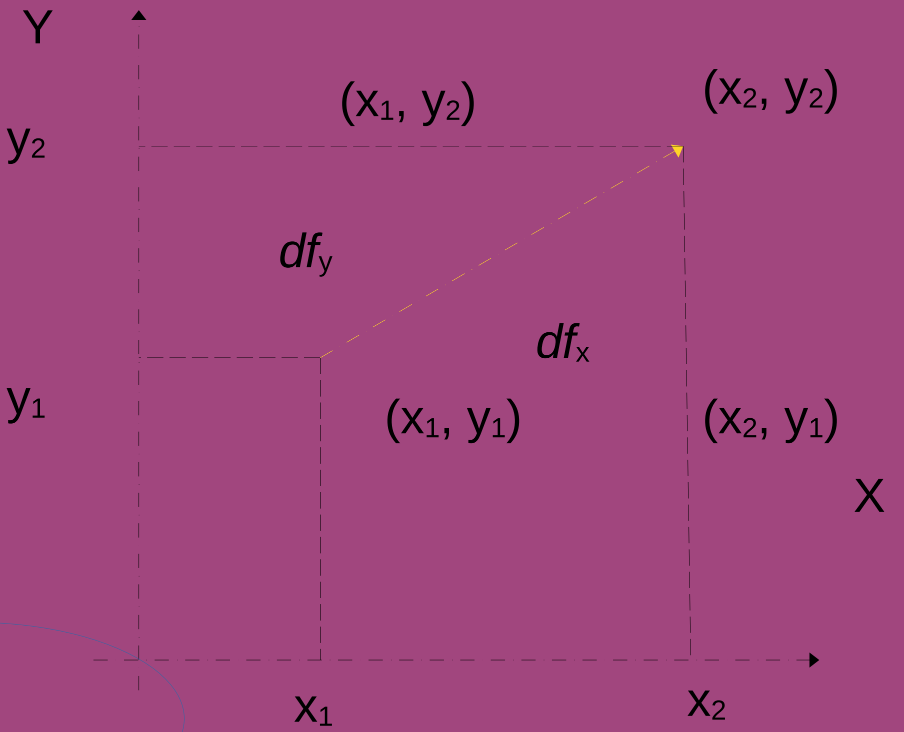
#ФизикаДляМенеджеров

Марат Авдыев
Marat@emediator.ru
SCM 2022

Функции нескольких переменных. Частные производные

$$\Delta f(x,y)=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\ldots$$

$$df=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y}dx+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x}dy$$



$$df(x,y)=(2x^2\cdot y^3+e^y)dx+(3x^2\cdot y^2+xe^y)dy$$

Электрическое поле. Потенциальные поля

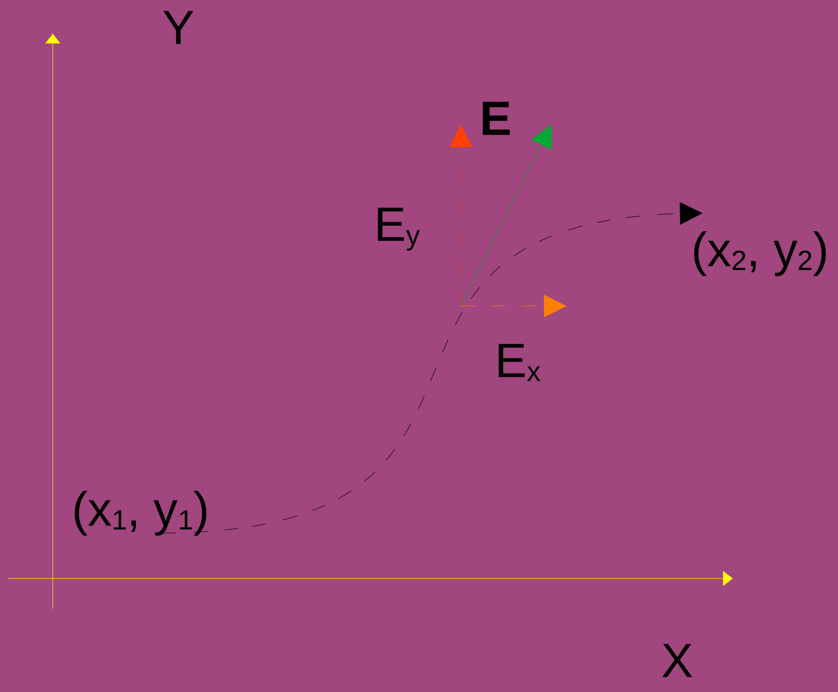
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} E\cos\alpha \, dl$$

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{(L)} E_x dx + E_y dy$$

Полный дифференциал.

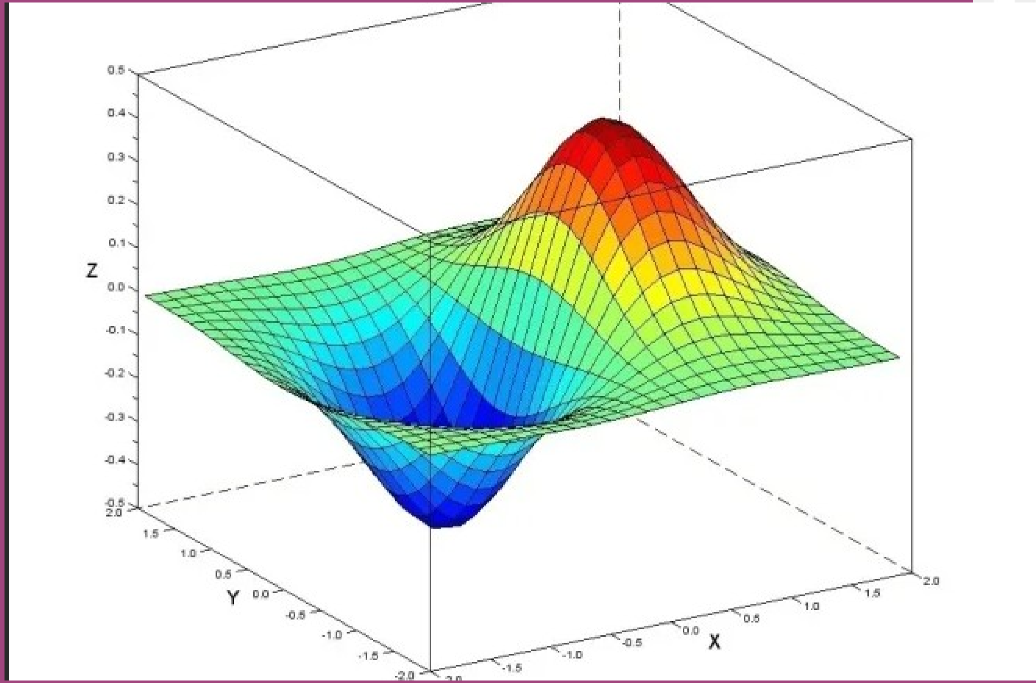
$$\oint E\, dl = 0$$

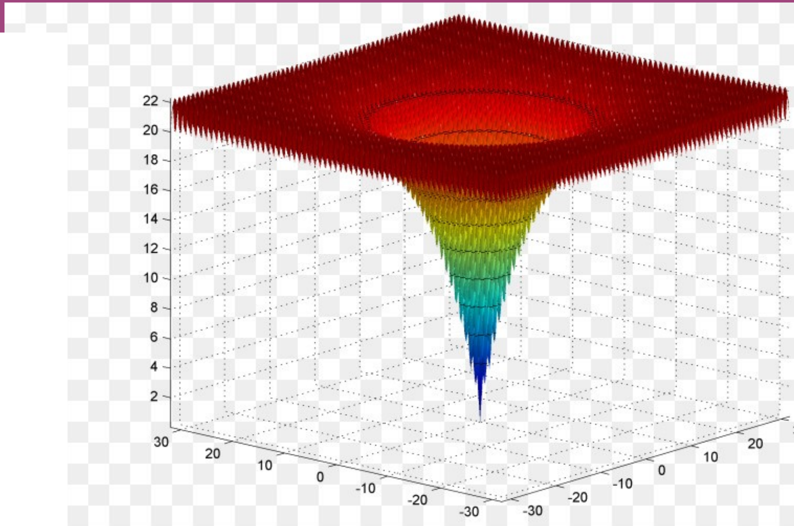
Безвихревое поле



Градиент. Горы и моря. Сингулярность

$$E = -grad(\phi) = -\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$



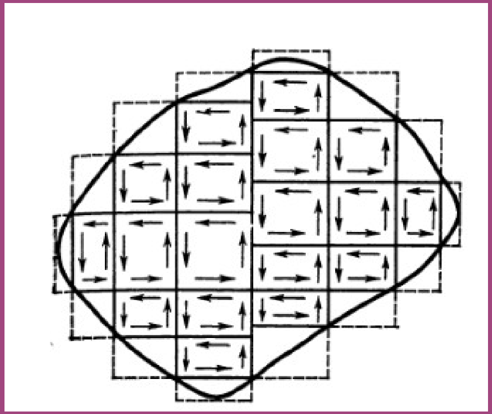


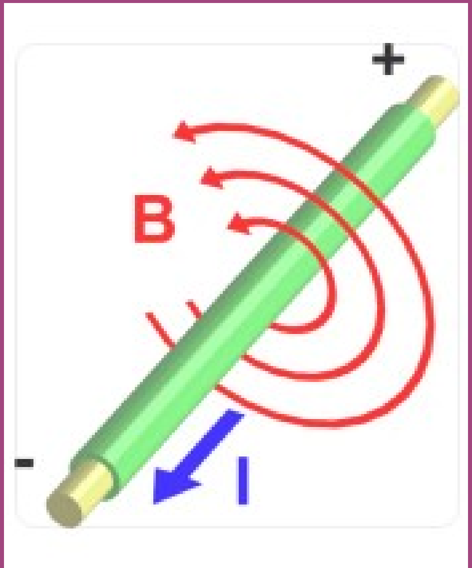
?

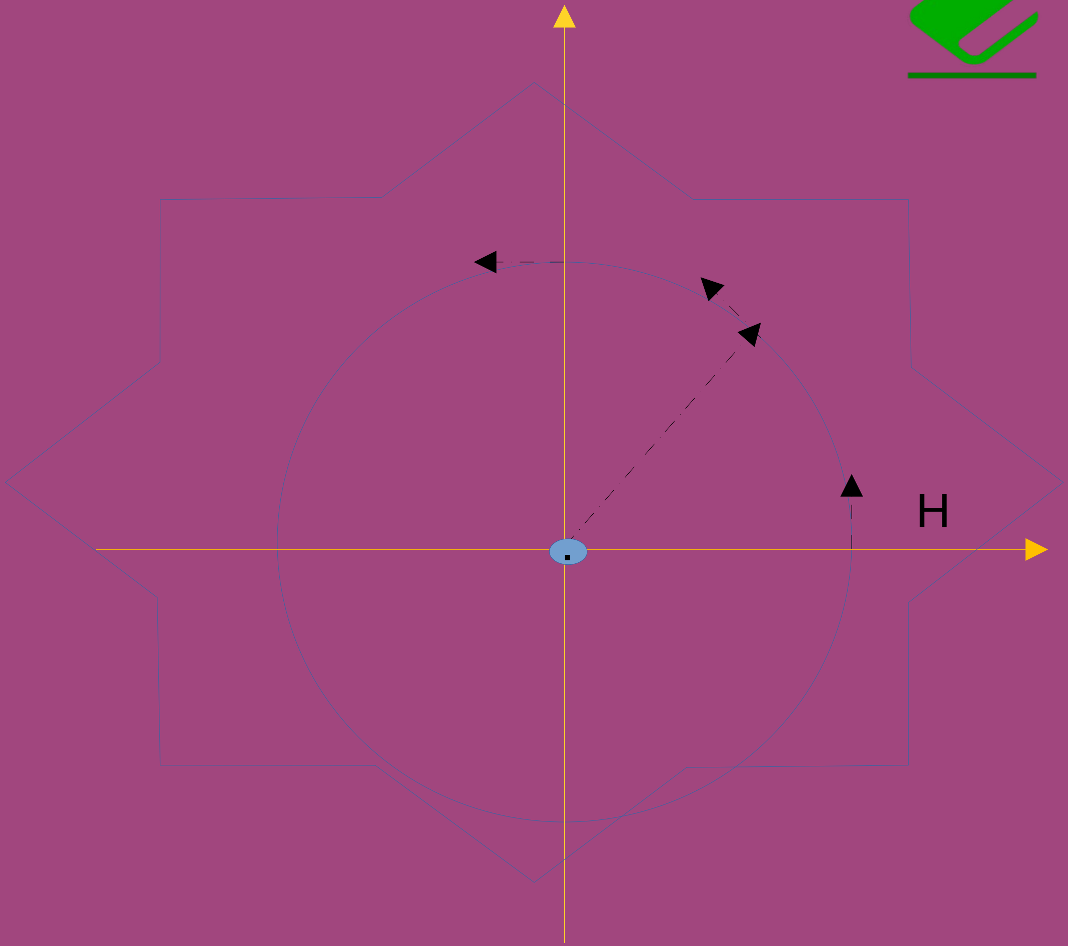
Вихревое поле

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{s} = I$$

H ~ I / r







Комплексные числа z = x + *i*y

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$|(z)| = \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$x = \rho\cos(\phi) \qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

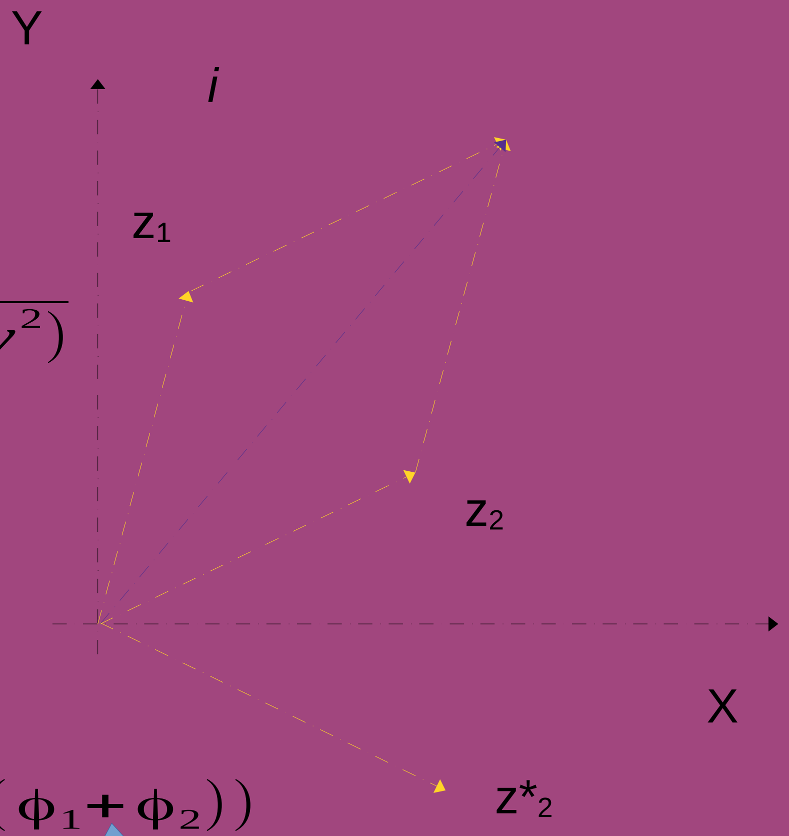
$$y = \rho\sin(\phi)$$

Arg z

mod z

$$z_1 * z_2 = \rho_1 * \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Arg z_1 + Arg z_2



$zz^* = |z|^2$

Формула Эйлера

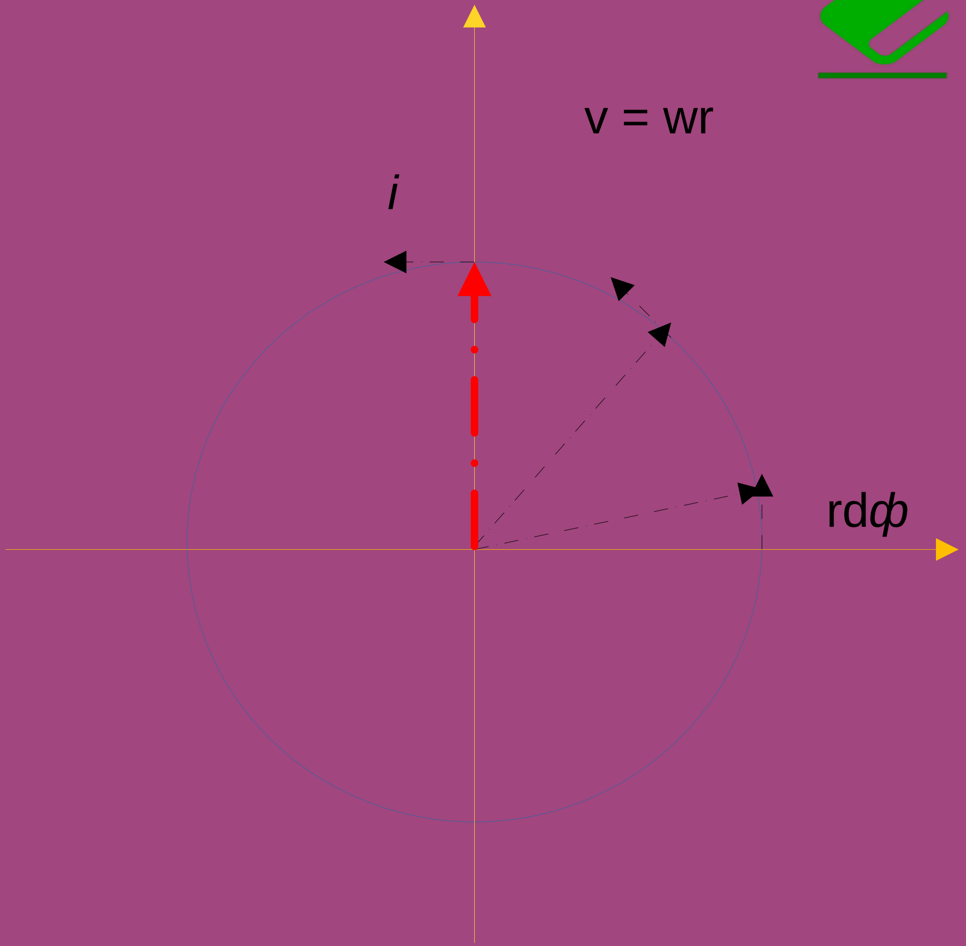
$$e^{i\phi}=\cos(\phi)+i\sin(\phi)$$

$$\frac{de^{k\phi}}{d\phi}=ke^{k\phi}$$

-sinф + *i* cosф

i(cosф + *i* sin ф)

$$de^{i\phi}=ie^{i\phi}d\phi$$



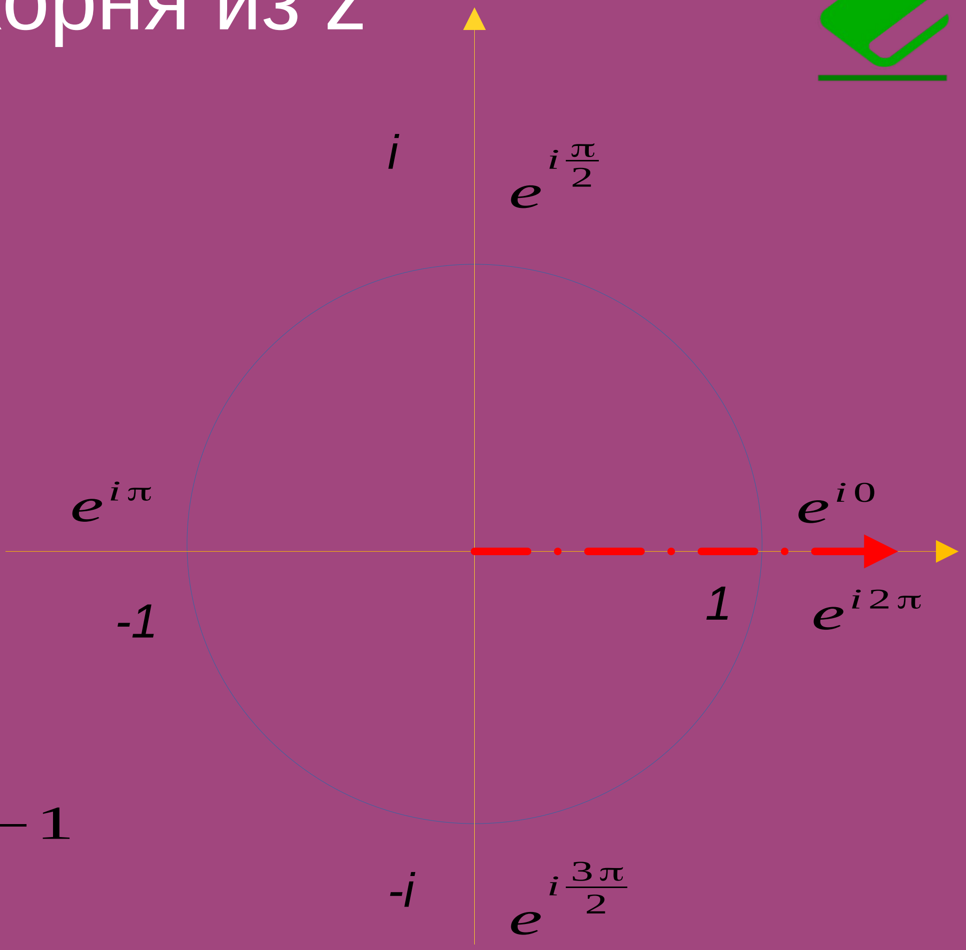
Аргумент i = 90°
Модуль = rd*ф*

Извлечение квадратного корня из z

$$\sqrt{(-1)} = \sqrt{(e^{i\pi})} = \sqrt{|(1)|} * e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}} = e^{\frac{i3\pi}{2}}$$

$$\sqrt{(z)} = \sqrt{|(z)|} * e^{i\phi+\frac{2\pi k}{n}}, k = 0, 1, n-1$$



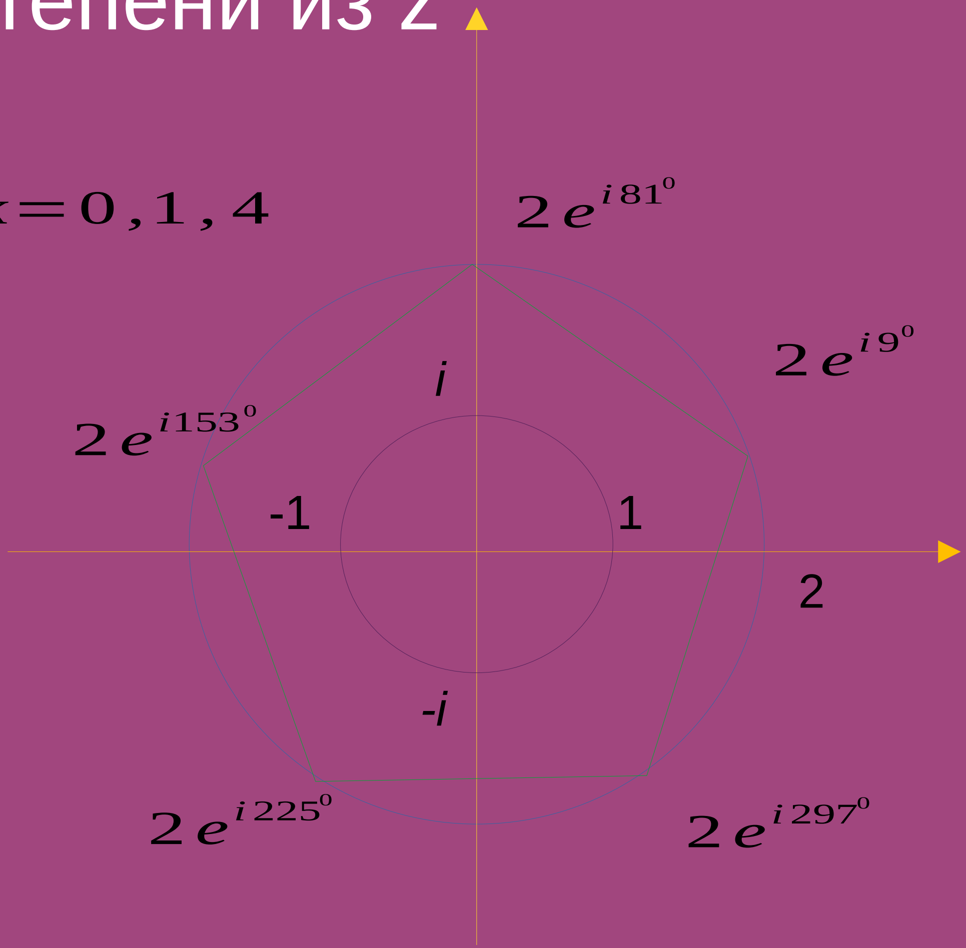
Извлечение корня 5 степени из z

$$\sqrt[5]{16(1+i)}=\sqrt[5]{32}*e^{i\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}}, k=0,1,4$$

9^0

72^0

$$2*e^{i\frac{45^0}{5}+\frac{360^0 k}{5}}, k=0,1,4$$



Возведение в степень. Логарифмы от Z

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

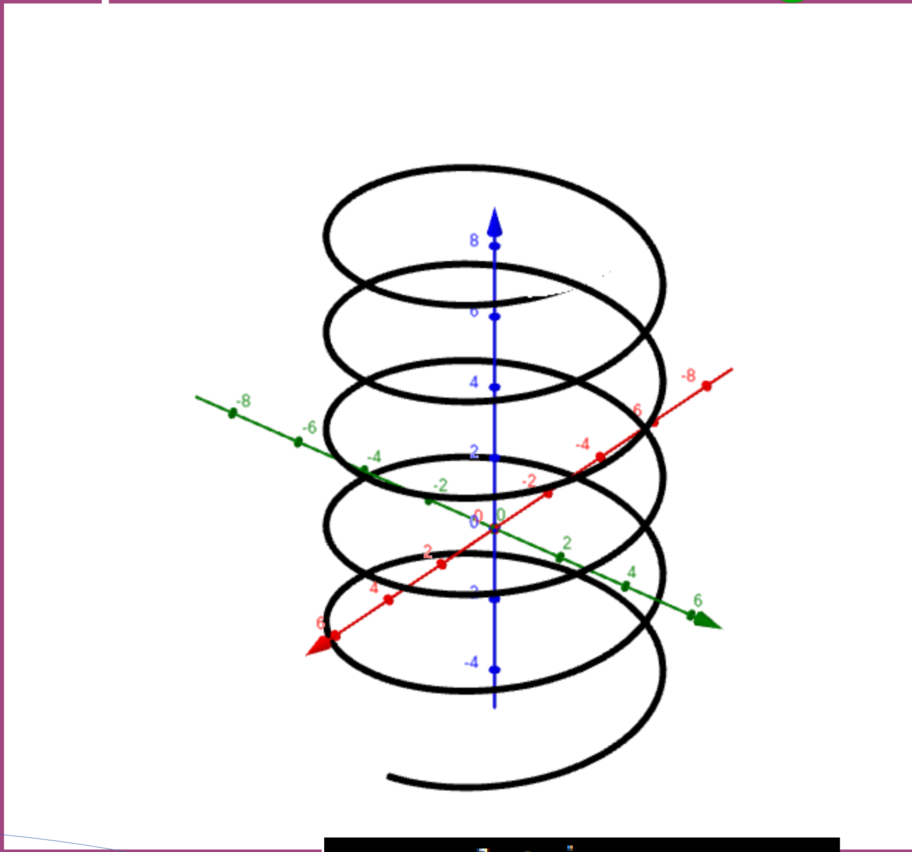
$$e^w = z \qquad \text{w = Ln z}$$

$$z = \rho e^{i\phi}$$

$$w = \ln\rho + i\phi + i2\pi k$$

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{\frac{-\pi}{4} + i0{,}345}$$

$$\ln(1+i) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}} * e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$




```
>> a = 1 + i
a =  1 + 1i
>> b = a^i
b =  0.4288 + 0.1549i
```

Производная функции f(z) = u(x,y) + *i* v(x,y)

$$\frac{df}{dz}=\frac{d(u(x,y)+iv(x,y))}{dx+idy}$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial u}{dx}+i\frac{\partial v}{dx}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$$

$$\frac{df}{idy}=-i\frac{\partial u}{dy}+\frac{\partial v}{dy}$$

Аналитическая f

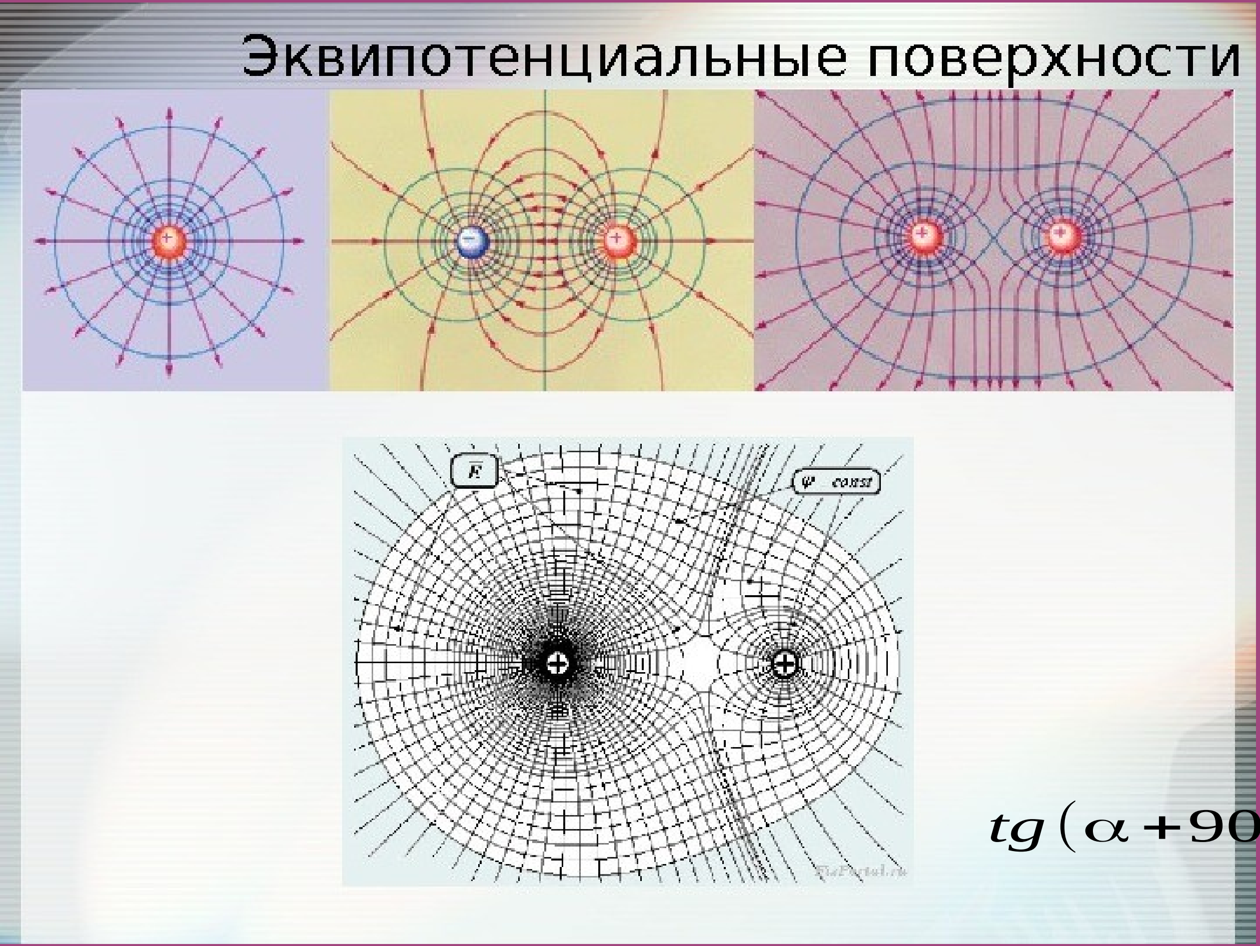
Условие Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{dx}=\frac{\partial v}{dy} \qquad \frac{\partial u}{dy}=-\frac{\partial v}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{dxdy}+\frac{\partial^2 v}{dxdy}=0$$

Гармоническая функция
Условие Лапласа

Электрическое поле и эквипотенциальные поверхности



Сопряженные гармонические Функции u , v

$$tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}$$

u = const

$$du = 0 = \frac{\partial u}{dx} dx + \frac{\partial u}{dy} dy$$

$$tg\,\alpha = -\frac{\frac{\partial u}{dx}}{\frac{\partial u}{dy}}$$

$$tg(\alpha + 90^0) = -ctg(\alpha) = \frac{-1}{tg(\alpha)}$$

Интеграл от аналитической f, одна ветвь

$\sim h^3 * 1/h^2 \to 0$

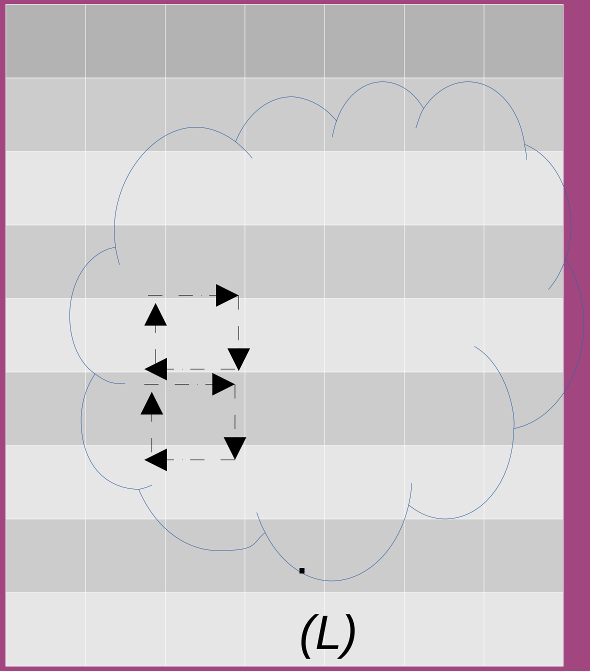
$$\oint_{(L)} f(z)\,dz = \oint_{(L)} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \alpha(z-z_o)^2\right) dz = 0$$

Условие Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial v}{dy} \qquad \frac{\partial u}{dy} = -\frac{\partial v}{dx}$$

$$\Phi = \int f(z)\,dz + Const$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = f(z)$$

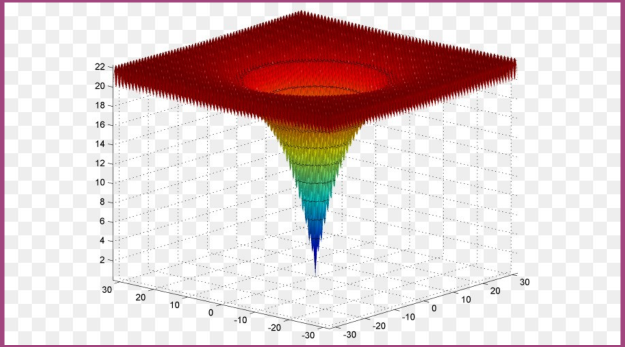


Обход => Возвращение в исход. Тчк.

Ряд Лорана f(z) = ? Тчк. сингулярности

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k (z - z_o)^k = \frac{c_{-k}}{\Delta z^k} + \frac{c_{-k+1}}{\Delta z^{k-1}} \ldots + \frac{c_{-1}}{\Delta z} + c_0 + \ldots c_{k-1} \Delta z^{k-1} + c_k \Delta z^k$$

Все члены ряда — аналитические f, но есть полюсы

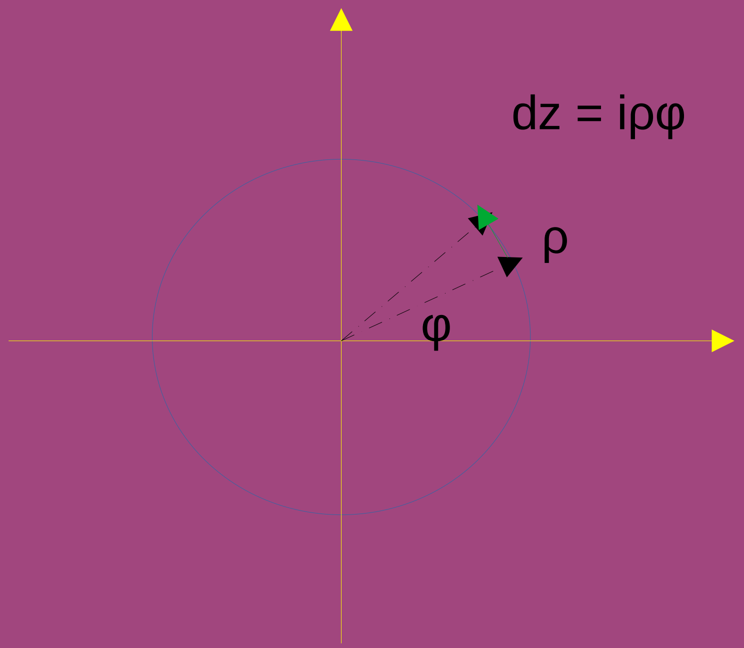


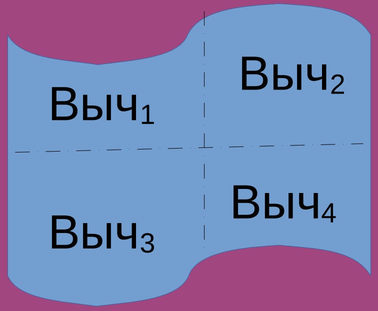
$$\int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1}, m \neq -1$$

$$\oint f(z) dz = \oint \frac{c_{-1}}{z - z_o} dz = \ln(z - z_0) - \ln(z - z_0) + 2\pi i * k, k = 1$$

Вычеты

$$\oint \frac{1}{z}\,dz=\oint i\,\frac{\rho\, e^{i}\phi}{\rho\, e^{i}\phi}\,d\phi=2\pi i\,d\phi$$





$$\oint f(z)\,dz=2\pi i\,(\text{Выч}_1+\text{Выч}_2+\text{Выч}_3+\text{Выч}_4)$$

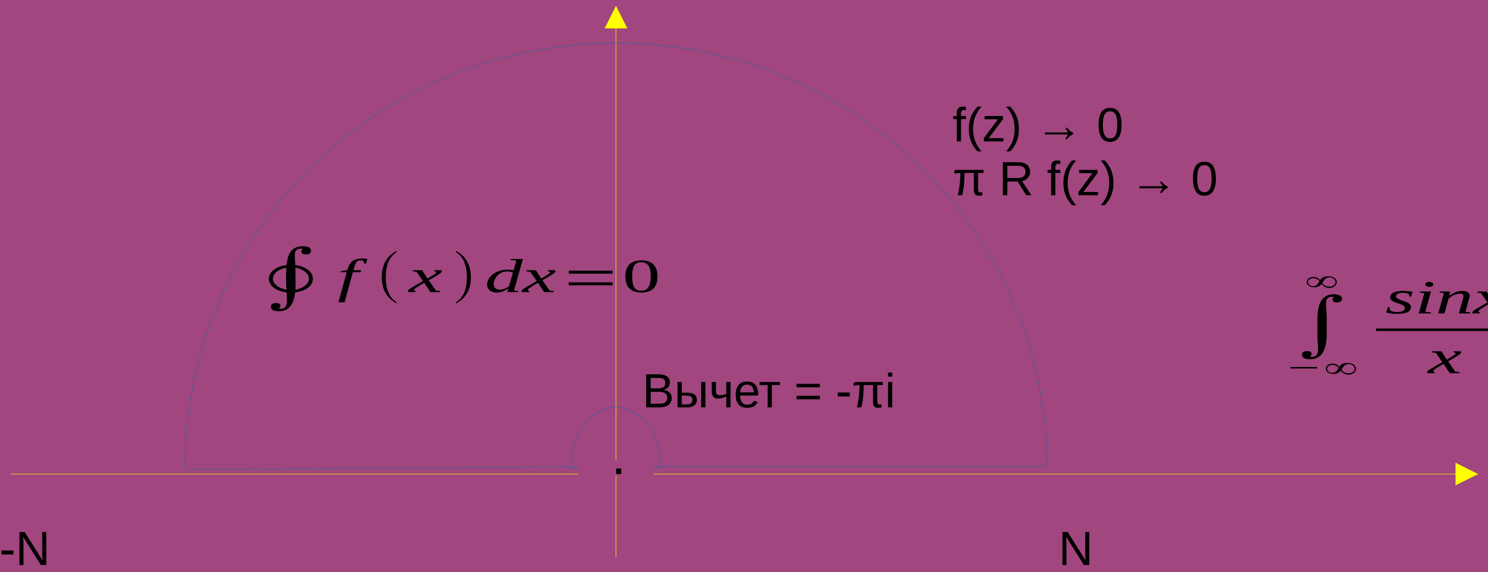
Вычет в особой тчк.   f= g/h , h = 0

$$\lim \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0) + \acute{g}(z_0)\Delta Z + \ddot{g}\frac{(z_0)}{2}\Delta Z^2 + \dots}{\cancel{h(z_0)} + \acute{h}(z_0)\Delta Z + \ddot{h}\frac{(z_0)}{2}\Delta Z^2 + \dots} = \frac{g(z_0)}{\acute{h}(z_0)}$$

$$\oint \frac{\sin(x)}{x} dx = Image \oint \frac{e^{ix}}{1} dx = Image(-\pi i) \cdot \frac{1}{1} = \pi$$

f(z) → 0

π R f(z) → 0



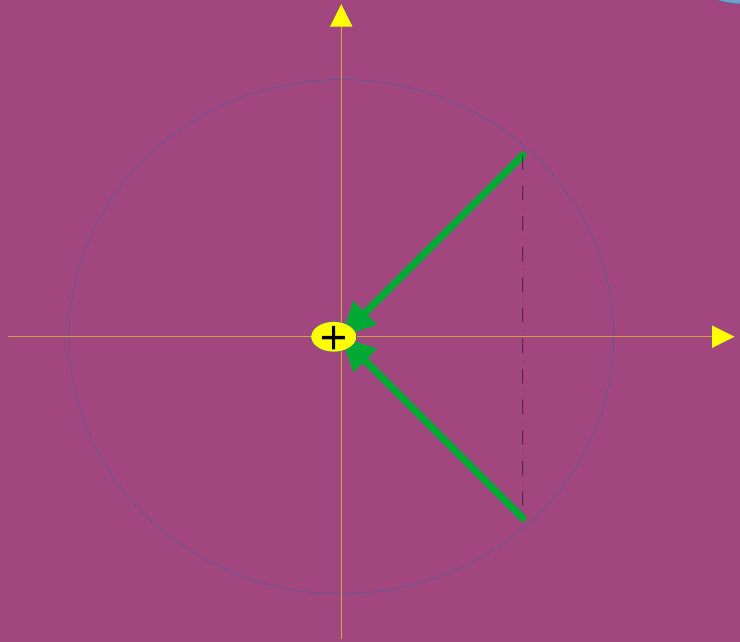
$$\oint f(x)\, dx = 0$$

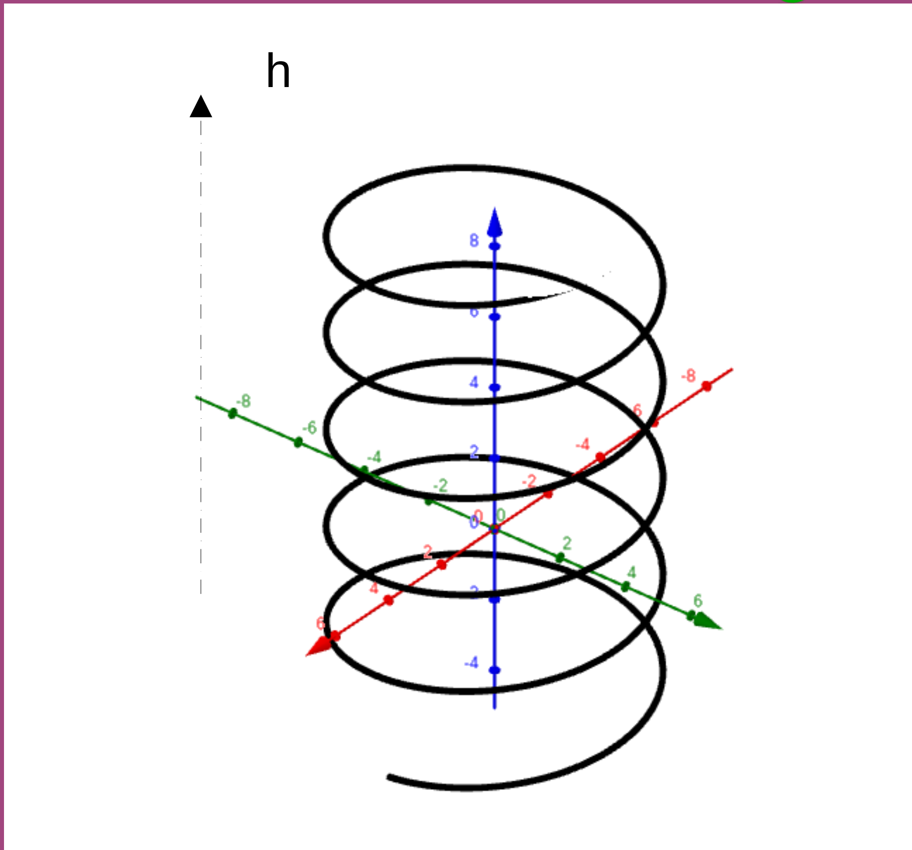
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{x} dx = \pi$$

Взятие интегралов с помощью вычетов

$$E = q\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wh}{r^2+h^2}\,dh$$

$xr = h$
$dx = dh/r$
$w/r = w_1$





$$E=\frac{q}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos w_1}{1+x^2}\,dx$$

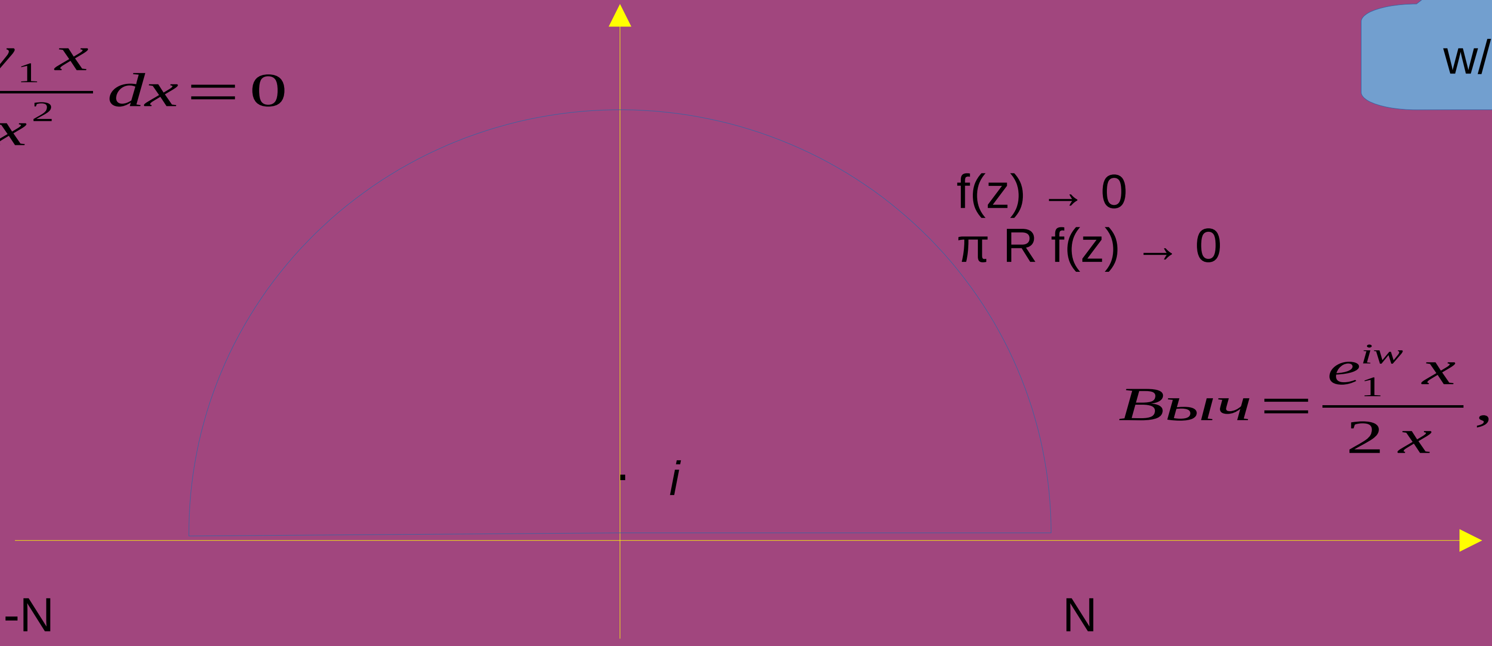
Применяем вычеты

$$E=\frac{q}{r}\,Real\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw_1 x}}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{w_1 x}}{1+x^2}\,dx=2\pi i\,\frac{e^{-w_1}}{2i}=\pi e^{-w_1}$$

w/r = w_1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w_1 x}{1+x^2}\,dx=0$$



f(z) → 0

π R f(z) → 0

$$Выч=\frac{e^{iw_1 x}}{2x},\; x=i$$

$$E=\pi q\,\frac{e^{-\frac{w}{r}}}{r}$$

Комплексный потенциал

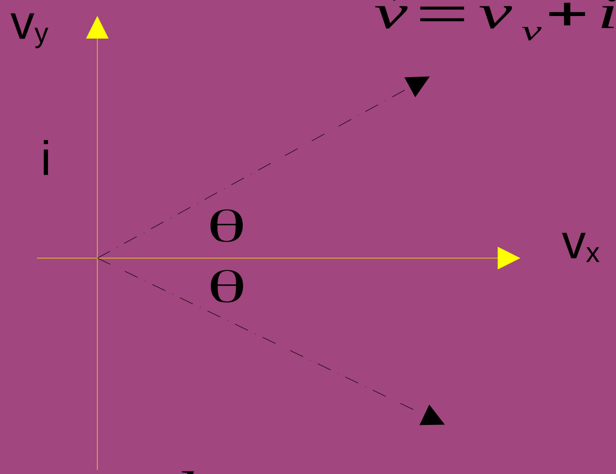
$$\frac{dw}{dz} = \vec{v} = v_v - iv_y$$

w(z) = φ + iψ — сопряженные гармонические f

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

w(z) = φ - iψ — комплексный потенциал

$$\vec{v} = v_v + iv_y$$



$$\frac{dw}{dz} = \vec{v} = v_v - iv_y$$

Условие Коши-Римана

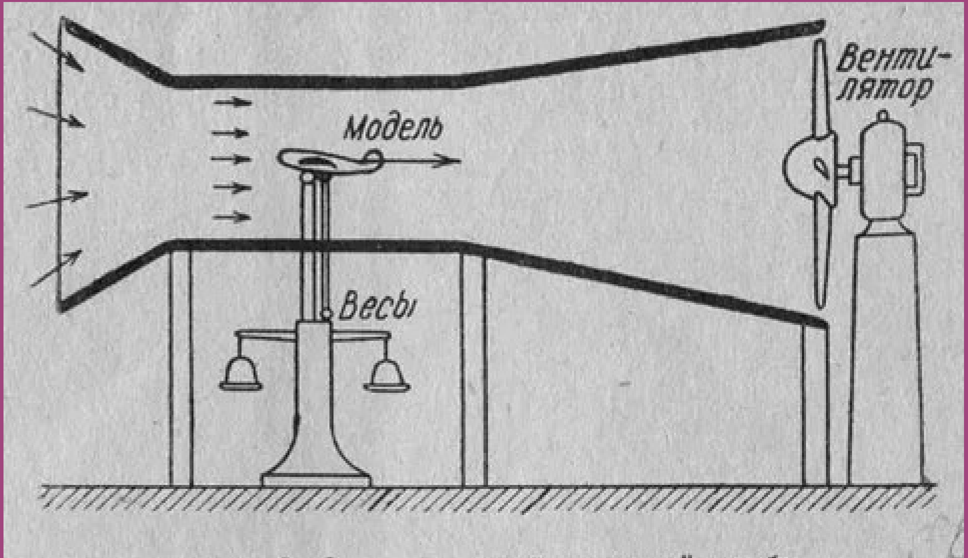
$$\frac{\partial u}{dx} = \frac{\partial v}{dy} \qquad \frac{\partial u}{dy} = -\frac{\partial v}{dx}$$

$$\frac{dw}{dz} = v(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta}$$

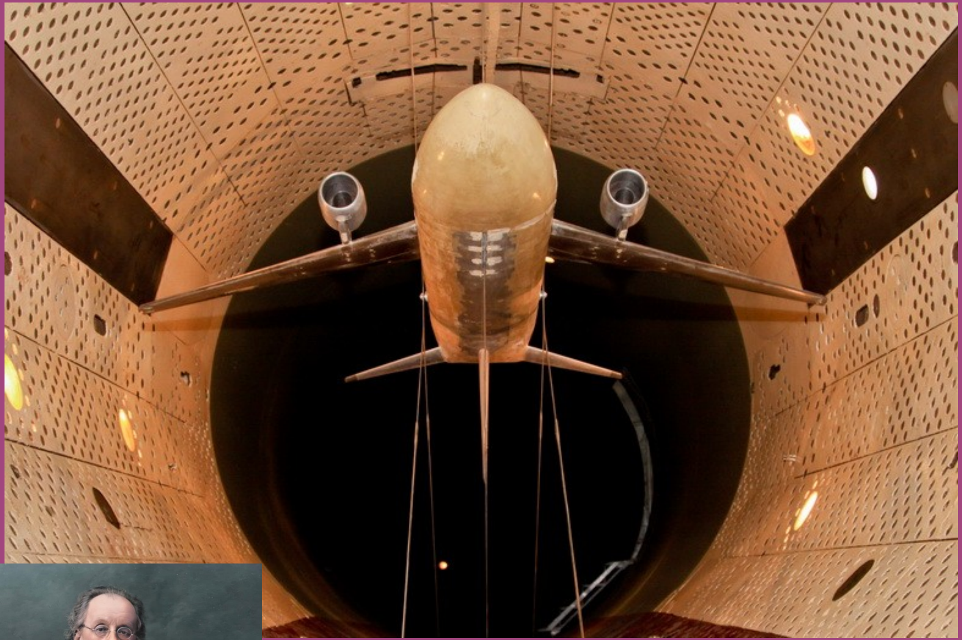
Прямолинейный равномерный поток

v = az

$$\frac{dw}{dz} = a, v = a$$



Фиг. 3. Схема аэродинамической трубы.



Циолковский Константин
Эдуардович
1857-1935

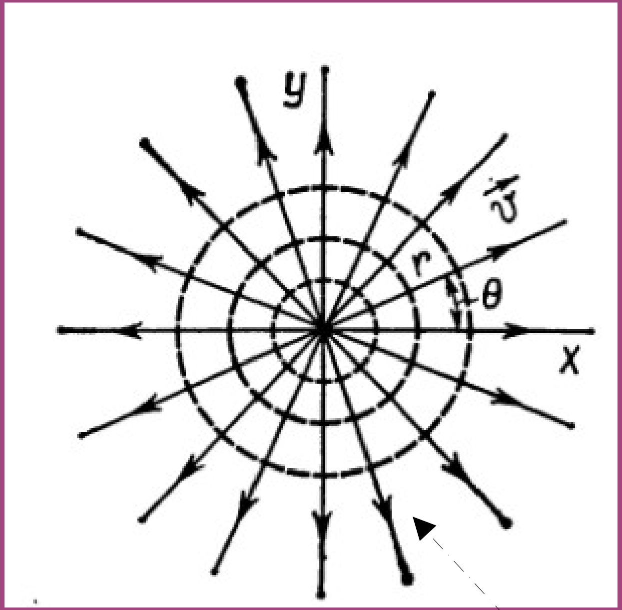
Пример w(z) = φ - iψ : источник и сток

Дифференцируй это!

w(z) = Ln z

$$z = r e^{-i\theta}$$

w(z) = φ - iψ = ln r — i θ



φ = ln r = const

ψ = θ = const

$$Q = v\, 2\pi r$$

$$v = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{i\theta}$$

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

Остроградский
Михаил Васильевич
1801-1862

Карл Фридрих Гаусс
1777-1855

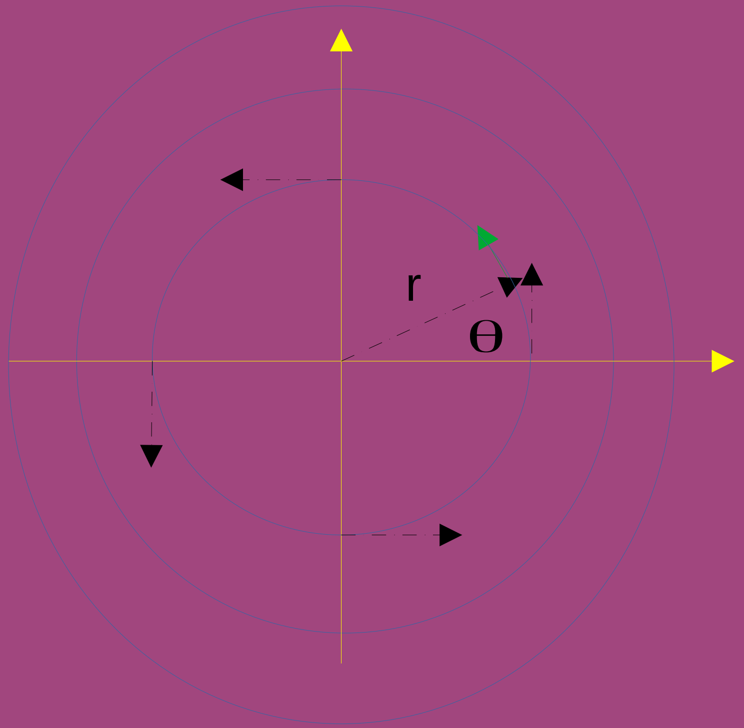
Пример: Вихрь (ротор)

$$w(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

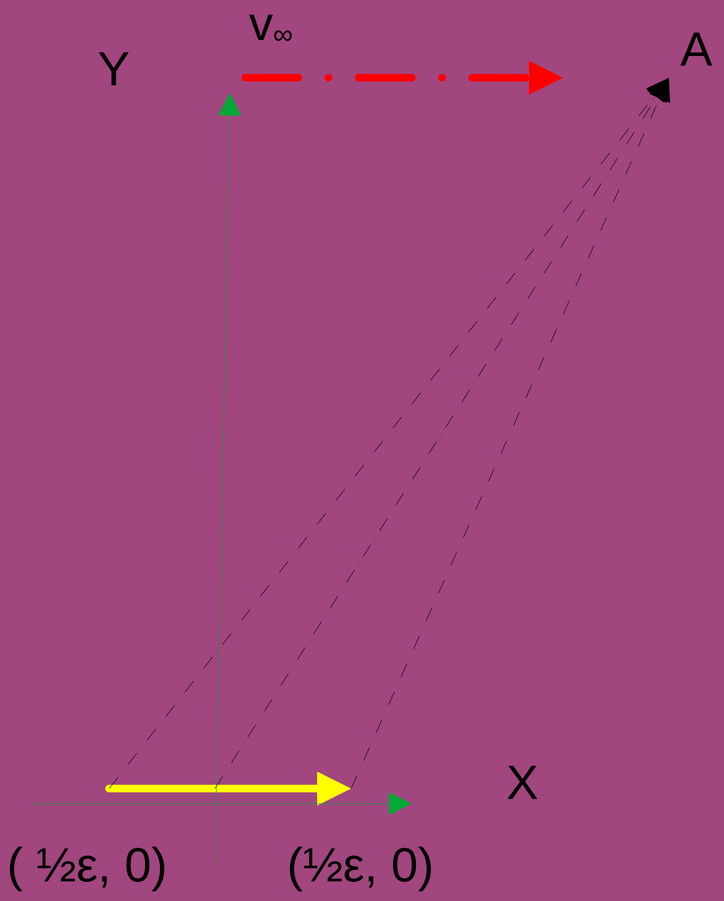
v

$$\frac{dw}{dz}=-i\frac{\Gamma}{2\pi z}=\frac{\Gamma}{2\pi r}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$w(z)=\frac{\pm\Gamma}{2\pi i}\ln(z-z_0)$$



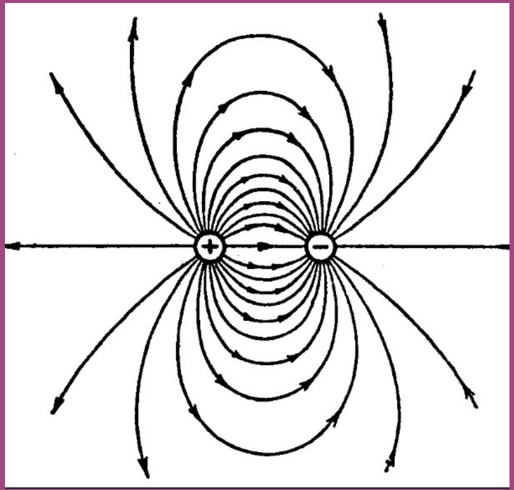
Потенциалы линейно +. Пример: диполь



$$w = w_1 + w_2 = \frac{Q}{2\pi}\left(\ln\left(z + \frac{\epsilon}{2}\right) - \ln\left(z - \frac{\epsilon}{2}\right)\right)$$

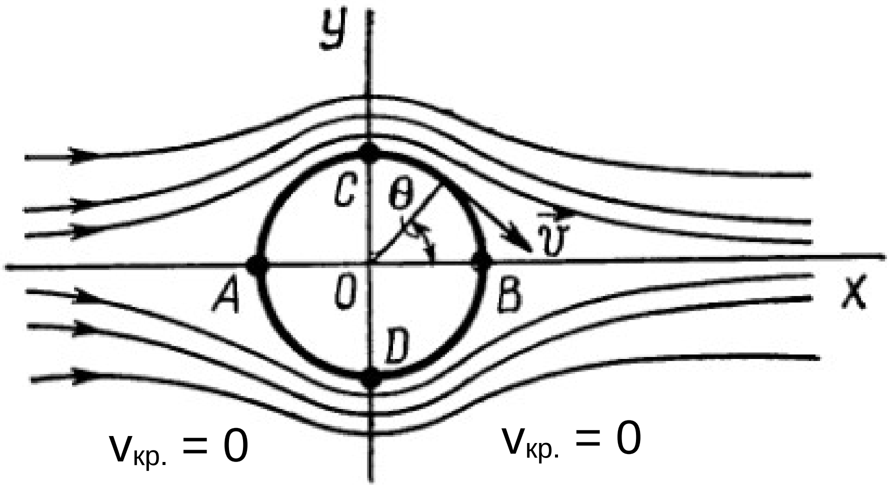
m = Q ε

$$w = w_1 + w_2 = \frac{Q\epsilon}{2\pi z} = \ldots = \frac{m}{2\pi(z - z_0)}$$



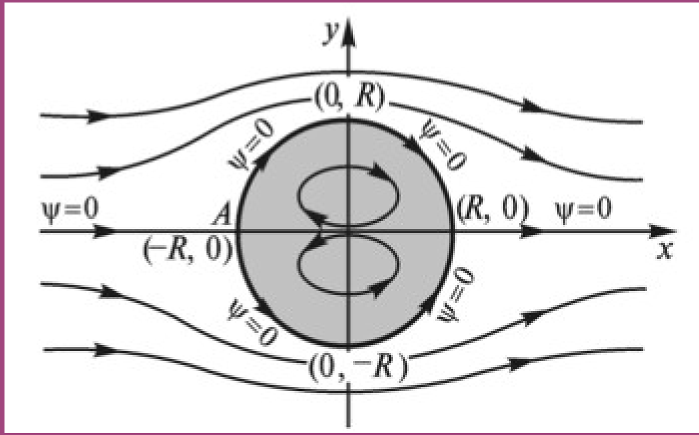
Обтекание цилиндра:
w потока + w диполя

$$w(z)=v_{\infty}\left(z+\frac{m}{2\pi v_{\infty} z}\right)$$



$v_{кр.} = 0$ $v_{кр.} = 0$

Рис. 7.6. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра



Функция тока ψ = const,
ψ = 0

$$w(z)=v_{\infty}\left(z+\frac{r_o^2}{z}\right)$$

$$r_0=\sqrt{\frac{m}{2\pi v_{\infty}}}$$

Циркуляционное обтекание цилиндра

$$w(z) = v_\infty \left(z + \frac{r_o^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

Скорость на поверхности цилиндра

$$v = \left| \left(2 v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_o} \right) \right|$$

$$p + \rho v^2 = p_\infty + \rho v_\infty^2$$ Бернулли

$v_{кр.} = 0$

$$\sin\theta = \frac{-\Gamma}{4\pi r_o}$$

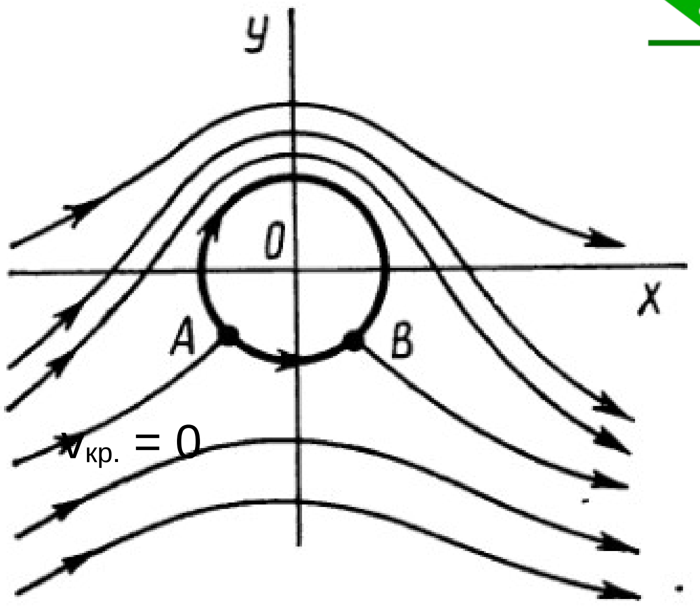
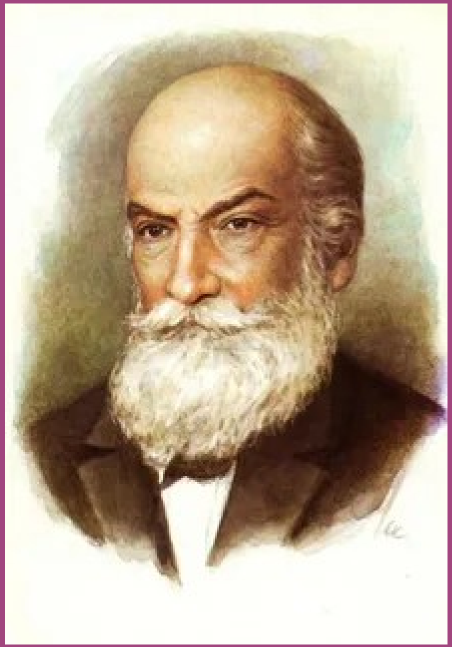
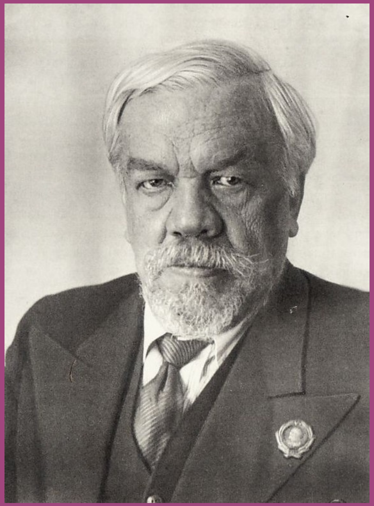


Рис. 7.8. Циркуляционное обтекание круглого цилиндра в случае $\Gamma < 4\pi v_\infty r_0$

Подъемная сила крыла



Николай Егорович
Жуковский (1847-1921)

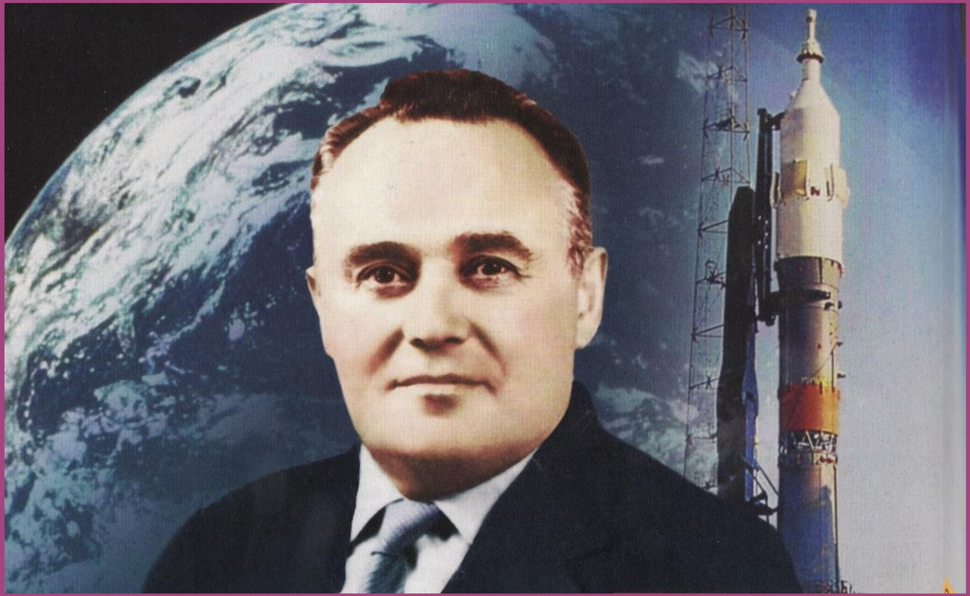


Сергей Алексеевич
Чаплыгин 1869-1942

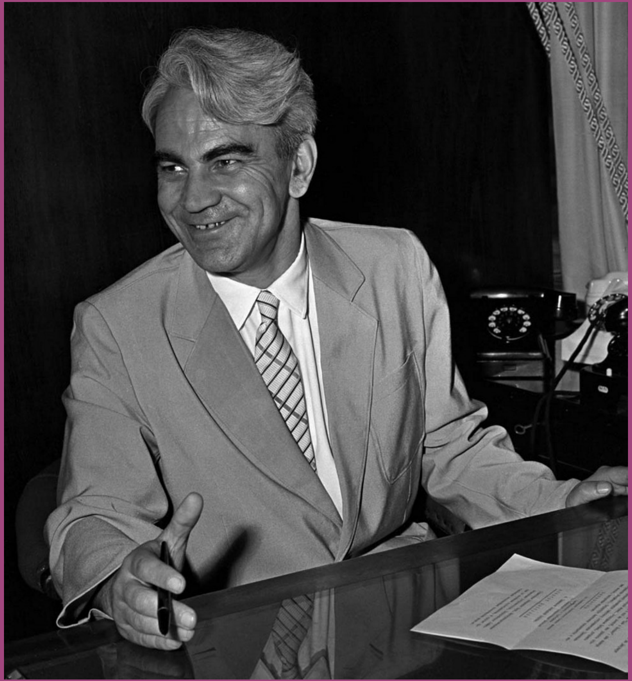
$$F_{подъёмная} = \rho \Gamma v_{\infty} l$$

Постулат плавного схода струй
с задней кромки профиля,

Разработка межконтинентальной баллистической ракеты



Серге́й Па́влович Королёв
1907-1966



Мстисла́в Все́володович
Ке́лдыш 1911-1978