В коллективной монографии рассматриваются теоретико-методологические аспекты развития высшего образования в России и за рубежом. Характеризуются вопросы цифровизации высшего образования. Отдельное внимание уделяется изучению новых методов и технологий обучения в вузе, а также характеристике инновационных направлений профессиональной подготовки студентов различного профиля.

Монография предназначена научным сотрудникам, преподавателям, аспирантам, студентам гуманитарных специальностей.

ISBN 978-5-6047336-7-7

Научное издательство «ЗЕБРА»

СОВРЕМЕННОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ИДЕИ, ТЕХНОЛОГИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ

КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

СОВРЕМЕННОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ИДЕИ, ТЕХНОЛОГИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ

КОЛЛЕКТИВНАЯ МОНОГРАФИЯ

Ульяновск
2021

УДК 400.3
ББК 340.132
С 56

Авторы:

Предисловие (Нагорнова Анна Юрьевна).

Глава 1 – § 1.1 (Полежаев В.Д., Полежаева Л.Н.), § 1.2 (Крейк А.И.), § 1.3 (Абрамова Н.В., Ессина И.Ю.), § 1.4 (Акименко Г.В., Лопатин А.А., Начева Л.В., Селедцов А.М., Кирина Ю.Ю.), § 1.5 (Кондрашихин А.Б.), § 1.6 (Степаненко Л.В.), § 1.7 (Шерайзина Р.М., Александрова М.В., Моринова Т.П.), § 1.8 (Райхельгауз Л.Б.), § 1.9 (Орбодоева Л.М.), § 1.10 (Александрова М.В., Алексеева О.В., Донина И.А., Задворная М.С., Лях Ю. А.**,** Хачатурова К.Р., Шерайзина Р.М.), § 1.11 (Белавкина М.В., Лысенко Д.С., Таютина Т.В., Агабалаева Д.Ш.), § 1.12 (Фокина Н.Н., Субботина М.М.).

Глава 2 – § 2.1 (Ничагина А.В.), § 2.2 (Атласова С.С., Федяев В.А.), § 2.3 (Мензул Е.В., Иванова С.В., Рязанцева Н.М., Василевская Е.А.), § 2.4 (Болдырева И.И.), § 2.5 (Бондарева Е.П., Чистякова Г.В., Сергеев С.А.), § 2.6 (Гарашкина Н.В., Дружинина А.А.), § 2.7 (Болотских В.И., Макеева А.В., Гребенникова И.В., Лидохова О.В., Лущик М.В., Остроухова О.Н.), § 2.8 (Авдыев М.А.).

Глава 3 – § 3.1 (Щупленков О.В., Щупленков Н.О.), § 3.2 (Алексеева И.А.), § 3.3 (Кривоносова Л.А.), § 3.4 (Белецкая Е.В., Каркавцева И.А., Дрожжина Д.А., Дрожжина П.Е.), § 3.5 (Маланичева А.В.), § 3.6 (Клещева Н.А.), § 3.7 (Чернов А.В., Романова М.М.), § 3.8 (Филипенко Е.В.), § 3.9 (Елканова Т.М.), § 3.10 (Овчинников Ю.Д.**,** Мирзоева Е.В., Тарасенко А.А.), § 3.11 (Балыкина А.М.).

Глава 4 – § 4.1 (Баранов В.М.), § 4.2 (Петровская М.В.), § 4.3 (Заболотная С.Г.), § 4.4 (Филоненко В.А., Тенищева В.Ф., Кузнецова Ю.С., Цыганко Е.Н.), § 4.5 (Грицук А.И., Рямова К.А., Лагунова Л.В., Филиппов А.Р., Исхакова А.В.), § 4.6 (Кулакова Н.В.).

Глава 5 – § 5.1 (Симакова Т.А., Ковальчук И.А.), § 5.2 (Албитова Е.П., Рогалева Г.И.), § 5.3 (Янюшкина Г.М., Кальянова А.В.), § 5.4 (Михайленко О.И., Кулимова Р.Х., Догучаева Т.А.).

Приложения – Приложение 1-3 (Фокина Н.Н., Субботина М.М.), Приложение 4-5 (Болдырева И.И.).

С 56 Современное высшее образование: идеи, технологии, результаты: коллективная монография / отв. ред. А.Ю. Нагорнова. – Ульяновск: Зебра, 2021. – 479 с.

В коллективной монографии рассматриваются теоретико-методологические аспекты развития высшего образования в России и за рубежом. Характеризуются вопросы цифровизации высшего образования. Отдельное внимание уделяется изучению новых методов и технологий обучения в вузе, а также характеристике инновационных направлений профессиональной подготовки студентов различного профиля.

Монография предназначена научным сотрудникам, преподавателям, аспирантам, студентам гуманитарных специальностей.

УДК 400.3
ББК 340.132

Рецензенты:

Лодатко Евгений Александрович – доктор педагогических наук, профессор кафедры педагогики высшей школы и образовательного менеджмента, Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого.

Арпентьева Мариям Равильевна – доктор психологических наук, доцент, старший научный отрудник кафедры психологии развития и образования ФГБОУ ВО «Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского».

ISBN 978-5-6047336-7-7

СОДЕРЖАНИЕ

9. Митрофанова К.А., Ивачев П.В., Кузьмин К.В. Электронные технологии учета учебных достижений студентов-медиков // Высшее образование в России. 2014. №6. С. 156-161.

10. Муллагалиев Н.А., Уразлина Р.В. Об отношении студентов к введению элементов дистанционного обучения в вузе // Международный научный журнал «Инновационная наука». 2017. №01-1. С. 188-191.

11. Мухаметшин Л., Салехова Л., Мухаметшина М. Использование системы LMS MOODLE в современном образовательном процессе // Филология и культура. Philology and culture. 2019. №2(56). С. 274-279.

12. Опыт использования платформы MOODLE для научно-исследовательской работы студентов / А.В. Макеева [и др.] // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 3-1. С. 167-171.

13. Поначугин А.В., Лапыгин Ю.Н. Цифровые образовательные ресурсы вуза: проектирование, анализ и экспертиза // Вестник Мининского университета. 2019. Т. 7, №2. С 5-35.

14. Цифровая образовательная среда электронного обучения. Методическое пособие / Е.Е. Дурноглазов [и др.] // Курск, 2019. 64 с.

15. Черненков Ю.В., Гуменюк О.И. Балльно-рейтинговая система – инновационная методика оценки академической успеваемости и практической подготовки студентов // Саратовский научно-медицинский журнал. 2014. №10 (3). С. 471-474.

16. Шехмирзова А.М., Грибина Л.В. Использование интерактивных элементов LMS MOODLE в образовательном процессе вуза // Социосфера. 2015. № 4. С. 86-90.

17. Электронная информационно-образовательная среда ВГМУ им. Н.Н. Бурденко [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://vrngmu.ru/academy/structure/otdel-elektronnogo-meditsinskogo-obrazovaniya/9042/ (дата обращения: 09.11.2021 г.).

18. Юсуфбекова Н. Р. Педагогическая инноватика как направление методологических исследований // Педагогическая теория: идеи и проблемы. М.: АСТ, 2013. 126 с.

2.8. Диофантово уравнение и десятая проблема Гильберта в школе в эпоху цифровизации

Начнём изучение Дифантовых управлений с Великой теоремы Ферма. Эта теорема без преувеличения, относится к жемчужинам научного знания. Теорему Ферма можно рассматривать с позиции теории чисел, геометрии, алгебры, комбинаторики, теория множеств, информатики, физики, логики и философии. Именно на примере этой теоремы в полной мере можно раскрыть преимущества конвергенции научных знаний в сравнении с узкоспециализированными методами исследований.

История Великой теоремы. Великая Теорема Ферма была сформулирована Пьером де Ферма в 1672 г., она гласит, что уравнение:

$$a^n + b^n = c^n \tag{1}$$

не имеет решений в целых, кроме нулевых значений, при $n > 2$

Когда $n = 2$, мы имеем дело с привычной теоремой Пифагора, при этом существует бесконечное число решений уравнения в целых числах - Пифагоровы тройки. Примеры Пифагоровых троек известны: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (15, 8, 17) и др. Со времён Евклида был найден целый ряд способов генерации Пифагоровых троек, например в виде [см. 1]:

$c = k^2 + l^2$, $a = 2kl$, $b = l^2 - k^2$

Из школьного куса математики легко понять, что Пифагоровы тройки имеют наглядную интерпретацию в терминах геометрии рациональных точек на единичной окружности. Эйлер в 1770 году доказал теорему (1) для случая n=3, Дирихле и Лежандр в 1825 - для n =5, Ламе - для n=7. Куммер показал, что теорема верна для всех простых n, меньших 100.

В сентябре 1994 года профессор Принстонского университета Эндрю Уайлс [2] доказал теорему (1), для всех n, но это доказательство, насчитывающее свыше ста сорока страниц, понятных лишь узким специалистам, нельзя уместить на полях перевода «Арифметики» Диофанта, «если бы они были немного шире», по выражению самого Пьера де Ферма, утверждавшего, что он «нашёл поистине чудесное доказательство, но поля здесь слишком узки, чтобы вместить его». Необычайная красота и лаконичность формулировки Великой теоремы Ферма заставляют искать наглядное решение. Итак, для $n \geq 3$ Пифагоровых троек найти ещё никому не удалось. Почему?

Доказательство Великой теоремы Ферма с позиции физики. Если тройка целых чисел $a^n + b^n = c^n$ существует, то ей можно сопоставить три гиперкуба с указанными целочисленными рёбрами, вписав многомерные кубы друг в друга (центры гиперкубов совмещены с началом координат), при этом объём малого гиперкуба a^n равен разности объёмов $c^n - b^n$. Легко доказать, что условие равенства объёмов и свойства *центральной симметричности*, *непрерывности* образованной фигуры взаимно исключают друг друга. Для этого достаточно мысленно перемещать *слой* из множества точек многомерного пространства, описываемого формулой $c^n - b^n$ в малый куб a^n и наоборот. Здесь (слой определяется как множество точек многомерного пространства действительных чисел R^n между последовательно следующими гиперкубами с целочисленными рёбрами. Слой, как и вся Фигура, состоит из элементарных гиперкубов 1^n.)

Спроектированная Фигура из трёх вложенных гиперкубов может заполняться послойно от периферии к центру или от центра к периферии подобно строительству каркасного дома. Именно такие методы использовал Евклид в своих *Началах* [2]. Слой из большого гиперкуба должен уложиться целое число раз в малом гиперкубе (в силу превышения большого над малым - два и более раз), иначе нарушится симметричность Фигуры или в слоях возникнут разрывы, что не допустимо. Как слой, так и гиперкуб имеют элементы размерности n-1, n-2, ... 1 это *гиперграни, соответствующей размерности, грани и рёбра*. "В пункте назначения" объёмы элементов каждой размерности должны быть тождественно равны объёму соответствующего перемещаемого элемента, в силу принципа несжимаемости объёма твёрдого тела и эквивалентности количества элементарных гиперкубов 1^n. Эти условия приводят к системе из n-1 уравнений, не разрешимой при $n > 2$ не только в целых, но и в действительных числах. Для иллюстрации достаточно сослаться на невозможность построения прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна сумме длин катетов. Легко убедиться, что при этих условиях один из катетов обязательно будет равен нулю. Следовательно, фигура из трёх вложенных гиперкубов с целочисленными рёбрами не существует в пространстве размерности более двух (*апория* или противоречие), и нет такой тройки чисел, которая нарушила бы Великую Теорему Ферма [3].

Заметим, что в рассуждениях выше предполагается без изменения общности, что натуральные числа соотносятся как $a < b < c$, при этом исключается ситуация равенства рёбер $a = b$ в силу иррациональности $\sqrt[n]{2}$. Случай отрицательных чисел может быть рассмотрен путем переноса слагаемого в другую часть уравнения и замены переменных -

достаточно доказать теорему для случая натуральных чисел a, b, c и обобщить результат на целые числа.

Возражения против краткого доказательства. Хотя краткость наглядность и новизна этого доказательства очевидны, оно вызвало негодование со стороны ряда учёных из-за использование автором “неточной” и нематематической терминологии: *слой, однородность, симметричность, перемещение и укладка слоя несколько раз*. Такая терминология характерна для школьной физики, но не приемлема в математике. Возражения в адрес автора последовали от ряда учёных, некоторые весьма уважаемые организации прибегли к анонимкам (автор располагает двумя письмами), и касались они использования терминов изотропность, однородность пространства, слой, и главное, представление структуры гиперкуба и его сечение двумерной плоскостью. Ниже мы убедимся, что уместнее говорить не о сечении, а о *пронзании* четырёх и более мерного гиперкуба двумерной плоскостью. Сразу можно возразить: во времена Пьера де Ферма ещё не было такой узкой специализации в науке, как это сложилось в современной физике и математике с их многочисленными подразделами и секциями, а также не был принят строгий формализм в доказывании, уместный для описания сложных многоплановых явлений современной науки, поэтому с позиции знаний XVII века было достаточно приведенного выше краткого доказательства. Вместе, с тем, краткое доказательство выдерживает проверку и со строго математических позиций современной науки. Убедимся в этом.

Взгляд из многомерного пространства. Для наглядности исследования в учебном фильме [4], научно-популярной книге [5] и аудиокниге [6] был применен метод постановки эксперимента в виртуальной реальности. Робот-андроид Фёдор отправился в многомерное пространство для совершения путешествия на космическом ранце из начала координат и одновременно центра гиперкуба с ребром *a,* грани которого ориентированы ортогонально координатным осям, к произвольной вершине этого гиперкуба. На перемещения, совершаемые Фёдором с помощью космического ранца, налагались ограничения: допускались движения только по направлению либо против направления любой из n осей координат. Фёдор совершил n прыжков: первый из начала координат к центру (гипер)грани наибольшей размерности n-1, а все остальные - поперёк первому прыжку. На каждом своём шаге или прыжке Федор изменял направление движения, сворачивая под прямым углом. Анализируя двумерный и трёхмерный случаи и обобщая результат на n -мерный случай, легко вычислить длину пути маршрута следования Фёдора: ½ an, а также расстояние от центра гиперкуба до произвольной вершины: ½ a√n по теореме Пифагора.

Рисунок 1 - Путь Фёдора к вершине гиперкуба

В результате этого эксперимента учащиеся получают представление о многомерном пространстве действительных чисел R^n, о гиперкубе, описываемом формулой a^n, а также о гиперплоскости - множестве точек $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n$, где $x_i = const$ для некоторой оси, т.е индекса i - целого $\leq$ n.

(Гипер)грань гиперкуба располагается в гиперплоскости, перпендикулярной только что построенной высоте и проходящей через основание этой высоты – точку пересечения прямой с этой (гипер)гранью. Заметим, что с точки зрения Фёдора все грани гиперкуба воспринимаются не как объёмные, а как (гипер)плоские фигуры. Слово *гипер* в круглых скобках можно и отбросить, но не забывать при этом о размерности упомянутых геометрических фигур.

Важно помнить, что Фёдор на своём пути наблюдал гиперкубы с эффектом параллакса. В учебном фильме приведён ряд примеров из астрономии, повседневности и произведений изобразительного искусства для объяснения этого эффекта. Что будет если спроецировать гиперкуб на двумерную плоскость, например, проходящую через оси X, Y, без эффекта параллакса? (Ответ - квадрат).

Анализ эксперимента. По итогам полёта обратимся к данным авто-навигатора, где отмечены наблюдения Фёдора и направления движения по каждой оси. Не меняя общности, можно расположить индексы координатной осей по нарастающий / по убывающей и получить следующий результат:

Рисунок 2 - Судовой журнал астронавигатора Фёдора

(Из основ комбинаторики легко заметить, что число элементов - *мощность* множества, состоящего лишь из двоичных элементов 0 и 1, равна 2^n - столько же вершин в n – мерном гиперкубе.)

В данном эксперименте Фёдор стартовал из центра одиннадцатимерного гиперкуба и последовательно исследовал все его гиперграни размерности от 10 до 1. На трёх последних шагах мы, как трёхмерные существа, могли бы увидеть внезапное появление Фёдора в центре трёхмерного куба из невидимого для нас четырёхмерного пространства, затем последовал бы прыжок в центр стены, потолка либо пола - по усмотрению Фёдора, после чего из двумерного квадрата - прыжок к центру ребра и наконец, последний шаг - прибытие в вершину.

Перпендикуляр, опущенный из центра гиперкуба на любую его грань, проходит через её центр, и длина образуемого отрезка (одновременно высота любой из совершенно одинаковых из 2n гиперпирамид, на которые рассекается гиперкуб) составляет *½a.* Легко убедиться, что грань гиперкуба – это гиперкуб размерности на единицу меньше, также имеющий грани-ребра размерности n-2, n-3 …вплоть до одномерных ребер и нольмерных вершин (для случая пространства целых чисел роль вершин принимают на себя единичные кубы 1^n – для простоты далее обозначаемые как *гиперкубики).*

Рисунок 3 - Обобщенная формула объёма гиперпирамиды

Легко заметить, что формула объема гиперпирамиды в n-мерном пространстве, обозначаемом здесь как $V^{(n)}$, будет следующей: H * S /n, где под площадью S понимается объём $V^{(n-1)}$ гиперграни в пространстве размерности n –1, на которую опирается гипер-пирамида, при этом H - её высота. Объём трёхмерной пирамиды и площадь треугольника являются частными случаями этой общей формулы. Боковые рёбра пирамиды задаются прямыми, следующими из начала координат в каждой из 2^n вершин по следующей фор-муле:

$$\frac{x_1}{\pm1}=\frac{x_2}{\pm1}=\dots\frac{x_n}{\pm1} \quad (2)$$

Здесь множество значений коэффициентов +1, -1 снова образует множество, коди-руемое единицей и нулем, а его мощность равна 2^n. Не обязательно уметь интегрировать, чтобы вычислить объем (гипер)пирамиды - достаточно научиться рассекать (гипер)куб на идентичные гиперпирамиды по числу (гипер)граней. Далее мысленно, заполнив пирамиду жидкостью, поместив её в однородное гравитационное поле, можно применить закон Паскаля и заметить, что давление на основание пирамиды зависит от веса, массы, объёма пирамиды, но в конечном счёте, однозначно определяются высотой и площадью основа-ния, независимо от формы пирамиды. Творческое воображение упрощает вычисления и делает интегрирование в ряде случаев ненужным!

Математическое определение слоя. Введём понятие *слоя.* Для чего выберем более удобное представление: гиперкубы с целочисленными рёбрами 1,2, 3, . . .i, полученные на основе ряда натуральных чисел, имеют общую вершину и расположены в области по-ложительных значений координат R^n. (Такое представление эквивалентно приведенному выше, когда *общие центры всех гиперкубов совпадают с началом координат* и получается за счёт масштабирования и отражения фигуры от гиперплоскостей, ортогональных ко-ординатным осям и проходящим через начало координат. И обратно - путём рассечения фигуры таким же гиперплоскостями). В этом удобном представлении слой S_i -это мно-жество точек в n-мерном пространстве, соответствующее выражению $(i + 1)^n – i^n$, если воспринимать его как фигуру (см. Листинг 1):

или $S_i \equiv (i+1)^n - i^n \equiv \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k i^k \cdot 1^{n-k}$ в частности, для трёхмерного случая имеем:

$$(i + 1)^3 - i^3 = 3i^2 1^1 + 3i^1 1^2 + 1^3 \quad (3)$$

Изучить внимательнее элементы, составляющие такое множество точек помогает 3D моделирование с помощью кроссплатформенного приложения OpenSCAD [7]. Оно позволяет получить цифровую модель слоя/множества слоёв, изменить моделируемые параметры, вращать, фигуру, рассматривать её под разными ракурсами и масштабами, распечатать фигуру на 3D принтере или вырезать её из листа фанеры, оргстекла, картона.

Листинг 1 Слой.scad

```
========== Листинг 1.1. Слой S5 номер 5 (i = 5) ==========
i = 5;
difference () {
cube (i, center = true);
cube (i — 1, center = true); }
/* Комментарий номер слоя может быть любым натуральным числом. А если применить программный цикл, то весь гиперкуб легко будет заполнить послойно от центра к периферии.*/
======================================================
```

Эта краткая форма универсальна и не зависит от размерности пространства (если бы OpenScad был настроен на работу с n -мерным пространством). Говоря более детально, следует запрограммировать масштаб и длину ребра гиперкуба, определить шаг и зазор между слоями. Далее - последовательно перемещать курсов в точку с координатами (x,y,z) и создавать *кубоиды* (параллелепипеды) необходимых размеров в виде трёх граней, трёх рёбер и одной вершины.

В результате получится слой, а совместно с программным циклом образуется множество слоёв:

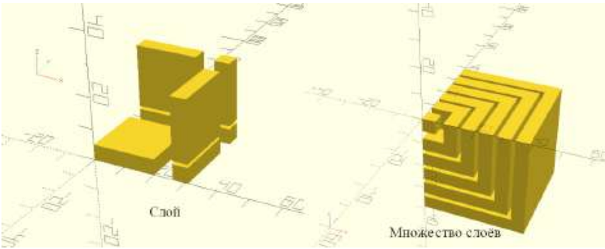

Рисунок 4 - Фигура одного слоя (слева) и множества слоёв (справа)

Легко обобщить формулу (3) на многомерный случай с помощью бинома Ньютона, треугольника Паскаля. Из чего следует, что слой S_i где i - это длина ребра и одновременно индекс слоя, состоит из элементов разных размерностей от нуля до n –1. В частности, для трёхмерного случая они аккуратно выписаны в формуле (3) и наглядно представлены на рис. 4.

Таблица 1 - Постулаты Евклида в эпоху цифровизации выглядели бы так

Фигура в Евклидовом пространстве (R^n)	Аналог в Z^n множество *гиперкубиков*	Размерность
Точка	1^n	0 и одновременно n в зависимости от ситуации
Отрезок	$a*1^{n-1}$, гиперкубики в кол-ве a выстроенные в ряд или столбец	1
Плоскость	a^2*1^{n-2}. гиперкубики в кол-ве a^2, выложенные по квадрату с ребром a	2

Для n--мерного пространства в слое имеются также гиперграни - a^k*1^{n-k}, при этом сомножители 1^{n-k} играют роль безразмерного коэффициента. В общем случае размерность слоя определяется аналогично многочлену старшим по размерности элементом, а в целом, размерность слоя на единицу меньше, чем охватываемый им объём.

Важно помнить, что объём гиперповерхности гиперкуба с ребром *a* вычисляется по формуле производной функции объёма от её аргумента ребра гиперкуба и составляет:

$na^{n-1}*1$ - что является *аппроксимацией* объёма слоя, получаемая путем отбрасывания членов, младших размерностей по отношению к степени (n–1). Лишь в предельном случае, когда увеличивается масштаб w, слой становится тождествен гиперповерхности. Интересно подставить значения параметра масштаба w: 5, 6 . . . 10 в листинге 1 программы Слой.scad, добиться более детального *разбиения* фигуры на слои и убедиться, что структура фигуры сохраняются, но при этом толщина каждого слоя уменьшается - он “утоньшается”.

Принцип соответствия в науке. Эти рассуждения иллюстрируют принцип соответствия в науке, гласящий, что: а) каждая естественно-научная теория является относительной истиной, содержащей элемент абсолютной истины б) смена естественно-научных теорий — логический процесс развития естествознания в) как новые, так и старые теории образуют единое целое. В самом деле, природа пространства, лежащая в основе действительных чисел R^n и в основе целых чисел Z^n остаётся одной и той же. Внимательный анализ показывает неустранимый конфликт *формы* и *содержания*, заложенный в формуле (1) при n > 2, что будет подробнее рассмотрено ниже.

На примере 3D моделирования легко воочию убедиться в возможности преобразования друг в друга фигур: гиперкубов с целочисленными рёбрами, полученными на основе ряда натуральных чисел

a. имеющих общую вершину и расположенных в области положительных значений координат R^n

b. имеющих *общие центры, совпадающие с началом координат* за счёт операций масштабирования и отражения от гиперплоскостей, ортогональных координатным осям, проходящим через начало координат (обратная операция - рассечения такими гиперплоскостями). Выбор представление обуславливается соображениями удобства анализа.

Важно помнить, что теорема Пифагора и Теорема Ферма не должны зависеть от единиц измерения, будь то метры, дециметры, сантиметры, миллиметры и т.д., - другими словами, тождество выполняется при любых - масштабах w и соответствующего ему разбиения большого гиперкуба c^n.

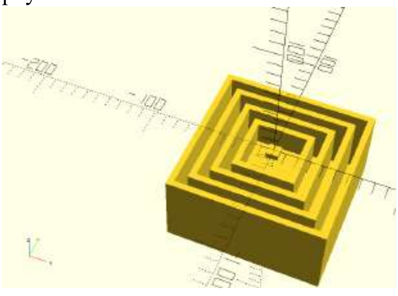

Рисунок 5 - Множество слоёв (фигура на Рис. 4 справа), отраженная от двумерных гиперплоскостей, ортогональным осям X, Y

Если отразить полученную на этом рисунке фигуру от двумерной гиперплоскости, ортогональной оси Z и проходящей через начало координат, как и только что упомянутые предыдущие, то получится гиперкуб размерности три. В программе, моделирующей эту фигуру, можно варьировать параметр шага step или зазора step -1, установив его равным, например, нулю step –1 = 0, что сделает множество точек непрерывным в R^n , проще говоря, без зазоров и пустот.

С помощью несложных рассуждений и понимания геометрического смысла формулы (3) полученные результаты легко обобщить на общий многомерный случай. В силу свойства центральной симметричности фигуры из трёх вложенных кубов, достаточно провести исследование лишь в направлении одной оси, например оси x_n и обобщить результаты на все остальные.

Рисунок 6 - Гиперкуб размерности 3, рассеченный на гиперпирамиды. Показан лишь один слой

В силу свойства центральной симметричности фигуры можно сфокусировать внимание на исследовании слоёв лишь одной из 2n гиперпирамид (треугольника для случая n = 2). Сосредоточим внимание на элементе, называемым далее *кубоид* вида $m^{n-k}1^k$. Здесь и далее будем именовать такой параллелепи́пед его английским аналогом *кубоид*.(cuboid) , подчеркивая специфику его формы. Помним, что *биноминальные коэффициенты* (3) во всех слоях одни и те же, и поэтому они сокращаются при операциях сравнения, сложения, вычитания объёмов элементов слоёв, не играя принципиальной роли. Как было установлено выше из *принципа соответствия*, размерность элемента $\dim(m^{n-k}1^k)$ = n–k. Сравнение элементов разных слоёв должно происходить строго с соблюдением этой размерности, иначе при изменении масштаба тожество нарушится.

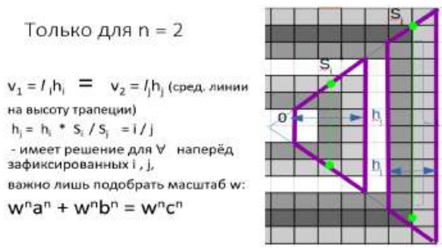

Рисунок 7 - Любые два множества последовательно следующих слоёв S в двумерном пространстве имеют *соизмеримые* объемы (площади)

Легко добиться равенства *мощностей* |{ . . . S_i . . . }| = |{ . . . Sj . . . }|, что означает количественное равенство гиперкубиков в обоих множествах (на Рис. 7. можно отыскать такой масштаб и такое разбиение большого гиперкуба c^n, что соотношение h_j = h_i * Si / Sj = i / j будет в целых числах. (Для этого w можно задать равным нескольким миллиардам, и кратным знаменателю дробной части). Слои в двумерном пространстве *соизмеримы* и пространство с этих позиций *однородно*.

При n = 2 сравнение происходит лишь по элементам размерности равной единице - рёбрам. Но в общем случае сопоставление одного или множества слоёв из подмножеств точек многомерного пространства c^n - b^n с объёмом множества слоёв в малом гиперкубе a^n приводит к системе из n-1 уравнений:

$j^{n-1} = k^{n-1} + (k-1)^{n-1} + (k-2)^{n-1}$ … как минимум два слагаемых или более.

$j^{n-2} = k^{n-2} + (k-1)^{n-2} + (k-2)^{n-2}$… как минимум два слагаемых или более.

. . . . Система из n-1 уравнений (4)

Здесь имеется в виду, что объём слоя S_j должен быть равен сумме объемов слоёв в силу постулируемого принципа однородности Евклидова и физического допущения *несжимаемости* объёма (аналог: определение *меры над множеством* в математике, как будет показано ниже):

S_k, S_{k-1}, S_{k-2} . . . . (хотя бы два и более слагаемых) следующих последовательно в малом гиперкубе a^n в силу свойства непрерывности гиперкуба и необходимости полного заполнения слоёв элементарными гиперкубиками 1^n. Иначе возникнут пустоты - дефект фигуры, нарушатся её свойства симметричности и непрерывности этого множества точек в R^n.

Эта система уравнений продолжается до вторых и первых степеней, т.е. двумерных граней и одномерных ребер. Такая система не разрешима при n > 2 не только в целых, но и в действительных числах R. Для понимания этого достаточно сосредоточить внимание на последних двух уравнениях в системе: если сумма катетов прямоугольного треугольника равна гипотенузе и одновременно сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то длина хотя бы один из катетов с необходимостью должен быть равен нулю: $\cancel{c^2} = \cancel{(a+b)^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (V - знак *дизъюнкции*, логическое ИЛИ). (Случай многих слагаемых справа последних двух уравнений в этой системе можно свести лишь в двум, если оперировать не в целых, а в рациональных числах Q.) Между тем, мы исключаем в нашем рассмотрении гиперкубы с нулевым размером ребра. Налицо противоречие, следовательно система уравнений (4) не разрешима даже в действительных числах R, при n > 2.

Вывод: каждый слой в фигуре из трёх вложенных гиперкубов является *уникальным* в том смысле, что $S_j = S_k \Leftrightarrow j = k$. Слои были бы подобны друг другу лишь в том случае, когда все их линейные размеры возрастали бы в равной пропорции по мере отдаления от начала координат и увеличения ребра i. Но толщины слоёв остаются постоянными, из чего следует: формулы слоёв имеют аналогичную структуру, но при этом слои не подобны друг другу.

Математики Древней Греции ввели понятие *несоизмеримости* отрезков. Например, несоизмеримы отрезки длиной √2 и 1. С этих позиций каждый слой S_i несоизмерим с другим S_j в пространстве целых чисел размерности свыше двух. Легко понять, что аналогичное верно для множеств непрерывно следующих слоёв:

{ . . . S_i . . . } и { . . .S_j . . . } несоизмеримы в Z^n при n > 2

И центрально симметричное пространство Z^n, n >2 становится *неоднородным*.

«Уникальность» слоя может быть сформирована условием: ∄ натуральных i, j при которых $V(S_i) = V(S_j) \pm V(S_{j-1}) + \ldots$ при n > 2. Объемы слоёв не обладают свойством *аддитивности* в R^n при n свыше двух. Нельзя говорить об операциях сложения, вычитания, сокращения, иного сравнения объёмов разных слоёв, следующих последовательно в рассматриваемой фигуре из трех гиперкубов.

С позиции теории множеств. Основы теории множеств и понимание элементарных операций: множество, подмножество, пересечение, объединения и дополнение, разность множеств, Декартово произведение, а также наглядное представление перечисленного с помощью *диаграмм Эйлера Венна* выпали из основной школьной программы, равно как и бинарные отношения над множествами. Между тем, некоторые старшеклассники, как правило не столько отличники, а обладающие достаточной мотивацией к изучению языков программирования и информатики, самостоятельно осваивают методы работы с реляционными базами данных, язык структурированных запросов SQL. Всё это указывает на актуальность перечисленного выше. Примерно два часа занятий позволят восполнить имеющийся пробел в эпоху цифровизации, и это поможет дать школьникам строгое определение *слоя* и *гиперкуба*, таким образом, чтобы учитывать важный аспект симметричности фигуры. (Полезны несложные упражнения над множествами, изучение законов *де Моргана*, понятие *мощности множества, счётности множества* с учащимися в рамках математических кружков и кванториумов). Выше мы неявно ссылались на понятие множество точек в R^n и Z^n- пора дать строго математическое определение.

Представим себе вписанные друг в друга гиперкубы с рёбрами, полученными из ряда последовательных натуральных чисел N_1 (начиная с единицы в отличие от N_0 также практикуемой в математике Западных стран в эпоху цифровизации и нумерации массивов с нуля в некоторых языках программирования), центры которых совпадают с началом координат, а грани – перпендикулярны осям координат. Гиперкубы e_i с рёбрами i на основе последовательного ряда натуральных чисел, вписанные друг в друга, образуют возрастающую *цепь множеств* и *отношения включения* в U:

$$e_0 \subseteq e_1 \ldots \subseteq e_k \subseteq e_{k+1} \ \ldots e_{k+l} \subseteq e_{k+l+1} \ldots \subseteq e_{k+l+m} \subseteq U \qquad (5)$$

$$1^n \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k \cup S_{k+1} \ldots \cup S_{k+l} \cup S_{k+l+1} \ldots \cup S_{k+l+m} \subseteq U$$

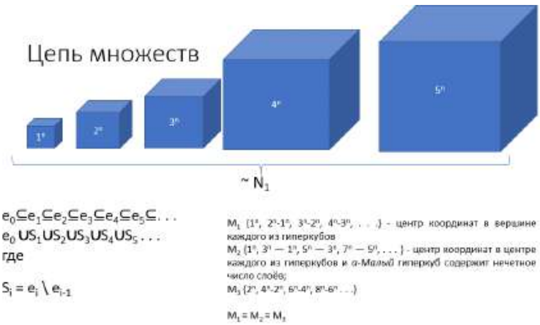

Рисунок 7 - Что такое гиперкуб и слой с позиции теории множеств?

Слой определяется как разность подмножеств $S_i = e_i \setminus e_{i-1}$. Под *гиперкубиком* e_0 понимается фигура, соответствующая 1^n или 2^n, в зависимости от чётности, но с учетом отговорок ниже, эта детализация не приводит к качественным отличиям. Здесь помимо *гиперкубика* e_0 в центре координат первые *k* слоёв образуют малый гиперкуб a^n, к ним добавляется *l* слоев для формирования среднего гиперкуба b^n, и наконец еще *m* слоев для образования c^n, который рассматривается как *универсум* U - трёх и более мерный *диаграммы Эйлера Венна*.

Фигура в виде композиции гиперкубов «начало координат в вершинах» и «начало координат в центрах гиперкубов» преобразуются друг в друга за счет отражения от гиперплоскостей размерности n-1, перпендикулярных осям координат, и масштабирования w (см. выше).

Итак, гиперкубам с целочисленными рёбрами a, b, c соответственно можно сопоставить подмножества: *A*, *A* ∪ *B*, *A* ∪ *B* ∪ C в *большом* гиперкубе c^n, вмещающем *средний* и *малый* (*Зимний сад* охватывает *Кофейню - библиотеку*, а центре - *Студия звукозаписи* см. следующий абзац после табл. 1 ниже). Будем обозначать c^n как основное множество U – *универсум*.

Таблица 2 - Определение подмножеств в гиперкубе

Подмножество в Z^n и его мощность | |	Объем подмножества V - это количество помещённых в него гиперкубиков 1^n V равен *мощности подмножества* | |
$\|A\| = a^n$	$V_A = \|A\|$
$\|B\| = b^n \setminus a^n$	$V_B = \|B\| = b^n - a^n$
$\|C\| = c^n \setminus b^n$	$V_C = \|C\| = c^n - b^n$

(Важно обратить внимание, что множество слоёв здесь и ниже записывается заглавной-прописной буквой *курсивом*.) Теорема Ферма эквивалентна высказыванию: в n-мерном пространстве целых чисел Z^n невозможно вписать друг в друга три гиперкуба с ребрами a, b, c таким образом, чтобы $|A| = |C|$ в определениях, данных в таблице 1 выше. В учебном фильме [4] для интерпретации сказанного приводится проект строительства дома для “капризной рок-звезды” в виде трёх вложенных друг друга кубов с целочисленными рёбрами:

- в центре - *Студия звукозаписи*,
- вокруг неё - *Кофейня-библиотека*
- и вокруг последней -*Зимний сад* с условием, что объём *Студии звукозаписи* равен объему Зимнего сада.

Теорема Ферма утверждает, что этот проект не осуществим для трёх вложенных друг в друга (гипер)кубов в пространстве целых чисел, начиная с размерности три и более. Для читателя, как трёхмерного существа, Великая теорема Ферма открывает великолепный шанс увидеть доказательство воочию, для этого необходимо сосредоточить внимание на поиске сходства и отличий в фигуре из трёх гиперкубов размерности два и три.

Отношения над множествами. В средних классах школы отношения рассматриваются преимущественно на примере функций. Некоторая функция отображает одно множество точек - отрезок или прямую по оси X, на другое множество по оси Y - это *бинарное отношение*. В общем случае подобные отношения могут быть установлены над множествами: фигурами, числами, алгебраическим выражениями и т.д.

Определим отношение *эквивалентности* F над U x U, таким образом, что

$$F = \{ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \forall\, \mathbf{y} \in U\ \exists!\ \ \mathbf{x} \in U \} \qquad (6)$$

Эта запись читается так: функция F отображает множество элементов- гиперкубиков из большого гиперкуба c^n (множество U) в него же, *таким образом, что* - знак |, для *любого* (квантор всеобщности, ∀) элемента $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ *существует лишь один* (квантор существования ∃!) элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, где координаты гиперкубиков можно определить в области положительных значений каждой оси, начиная от вершины большого гиперкуба c^n (помним, что выбор начала координат определяется соображениям удобства исследований). Другими словами, данное отношение *взаимно однозначно* сопоставляет в большом гиперкубе U один гиперкубик 1^n другому, что одновременно означает равенство их объёмов в силу постулируемой однородности n-мерного пространства R^n. F – работает как функция *эквивалентности*.

Заметим, что и Архимед, действуя как независимый эксперт, в своём знаменитом эксперименте по вытеснению воды физическим телом из ванны, использовал принцип *однородности пространства*, вытекающий из законов физики. Царь Гиерон, живший за 250 лет до новой эры, поручил ему проверить подлинность золотой короны. Взвесить корону было легко, но форма короны затрудняла определение её объема. Как измерить неизвестный объём? — погрузить его в ванну с водой и посмотреть на сколько поднялся верхний уровень воды. Далее по формуле расчета объёма ванны: произведение увеличения высоты на площадь ванны находится объем погружённого в воду тела. Поделив массу на объем, легко получить плотность короны и сравнить с контрольными значениями для слитка чистого золота.

Если бы Архимед работал в атмосфере Земли с объектами, сопоставимыми с горой Эверест, то с учётом разряжения атмосферы по мере набора высоты, учёному пришлось бы дифференцировать пространство на малые однородные объекты, а затем применить операцию интегрирования. Это показывает, что сопоставлять между собой можно лишь *однородные* объекты, имеющие единые признаки: массу, габариты, плотность, стоимость и т. д.

Наглядная иллюстрация бинарных отношений: багажные квитанции пассажиров рейса самолёта или билеты для посещения мультиплекса (комплекса кинозалов) в условиях, когда распроданы все билеты до последнего - в этом случае F *всюду определена* или *тотальна*. Развивая последнюю аналогию, можно представить себе огромный мультиплекс на космической орбите, где каждый слой -это отдельный кинозал со своим уникальным фильмом. Зрители могут свободно обмениваться билетами в пределах каждого кинозала - слоя S, выбирая желаемое зрительское место, а могут проследовать до лифта между этажами и поменять кинозал (слой). Сфокусируем внимание на билетах, каждый из которых обозначает координаты соответствующего места в мультиплексе в виде гиперкубика 1^n. Опустим эти билеты в “виртуальную шляпу” и как следует её “встряхнём”, т.е. запустим генератор случайных чисел.

Рисунок 8 - Алгоритм обмена билетами в шляпе реализован с помощью подстановок

Выразим сказанное в предыдущем абзаце на языке теории множеств: не меняя общности, можно представить F как суперпозицию функций: ∀ F = G * H где: H = {(**x, y**) | **x** ∈ {S_i} ∧ **y** ∈ {S_i} }, G = {(**x, y**) | x ∈ {S_i} ∧ **y** ∈ {S_j} : i ≠j } (знак *конъюнкции* ∧ обозначает логическое И, знак ∈ обозначает принадлежность элемента некоторому множеству). Другими словами, ∀ бинарное отношение над множеством или функция F работает в U как с гиперкубиками из одного конкретного слоя, так и с гиперкубиками из разных слоёв и можно это работу исследовать отдельно.

Исследование всех возможных отношений эквивалентности над гиперкубиками в гиперкубе. Как запрограммировать алгоритм обмена билетами в нашей виртуальной шляпе? Это легко реализовать с помощью подстановок. Сначала необходимо последовательно пронумеровать все места в мультиплексе. Для примера рассмотрим случай четырёхмерного пространства, каждое место задается координатами: $x = (x_1,x_2,x_3, x_4)$ - четверкой целых чисел. Выпишем их в ряд в электронной таблице и отсортируем по нарастающей в порядке: сначала по возрастанию в столбце x_1, затем - по x_2, x_3, x_4 - это напоминает IP адрес узла в глобальной сети Интернет. В итоге такой сортировки получится упорядоченный массив из c^n строк. В результате каждый гиперкубик и каждое место в мультиплексе получит свой уникальный номер - натуральное число, соответствующее элементу массива, т.е. строке в отсортированной таблице.

Таблица 3 - Двумерный случай. С помощью подстановки однозначно задано отношение эквивалентности

Задача: поменять местами верхнюю и нижнюю строки в кубе размерности 2	Реализация: подстановка. (Их общее число счётно ≤ c^n!)
1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9 7 8 9 4 5 6 1 2 3

С позиции сравнения объёмов $V_A = V_C$ и $|A| = |C|$ нас интересуют только операции между слоями из разных подмножеств. Доказательство теоремы Ферма сводится к вопросу: существует ли отношение эквивалентности G между *разными* слоями для исследуемой фигуры? И как следствие этого, возможно ли задать функцию, сохраняющую центральную симметричность фигуры и отображающую (знак →) в целом подмножество $C \rightarrow A$ или $A = G(C) \Rightarrow |A| = |C|$? С этих позиций в своём эксперименте Архимед, построил функцию эквивалентности между 3D моделью человеческого тела и вытесненными из ванны гиперкубиками воды.

На Рис. 8 некоторые подстановки выделены пунктирными овалами, а другие - нет. Дело в том, что из всех возможных подстановок необходимо отфильтровать лишь те, которые сохраняют свойство центральной симметричности фигуры. Именно они выделены овалами как *допустимые* в отличие от *недопустимых*, разрушающих свойство центральной симметрии фигуры. Если забыть о центральной симметрии, то легко привести пример Пифагоровой тройки для $n \geq 3$ в параллелепипеде 5 x 5 x 5 - трёхмерной фигуры, соответствующей с позиции теории множеств арифметическое выражению: $(5^2 \setminus 4^2 = 3^2) \times 5^1$ здесь знак x означает *Декартово произведение множеств*. Результаты Декартова произведения множеств: {1,2,3,4,5,6,7,8} x {a,b,c,d,e,f,g,h} = Шахматная доска.

$R \times R \times R = R^3$ -трёхмерное пространство, $Z \times Z \times \ldots \times Z = Z^n$ -это n-мерное пространство целых чисел и т.п.. Учащимся будет интересно поупражняться в Декартовом произведении отрезка $[-½ , ½] \times [-½ , ½] \times \ldots [-½ , ½] = [-½ , ½]^n$, а также цепи отрезков длиной 1,2,3 . . . на основе ряда натуральных чисел N_1. Это поможет увереннее представить слоистую структуру гиперкуба, и смысл формулы (5).

Для n -мерного пространства Пифагоровы тройки могут быть в виде Декартова произведения результата вычитания квадратов на некоторый гиперкуб:

$$(c^2 \setminus b^2 = a^2) \times d^{n-2}, \tag{7}$$

где (a, b c) - это Пифагорова тройка на двумерной плоскости.

Декартово произведение результата вычитания квадратов на некоторый гиперкуб для случая трёхмерного пространства напоминает сечение антенного кабеля, при этом подразумевается квадратное сечение. Итак, пожертвовав принципом центральной симметрии, легко отыскать бесконечное множество таких троек, лишь ещё раз подтверждающих теорему Пифагора.

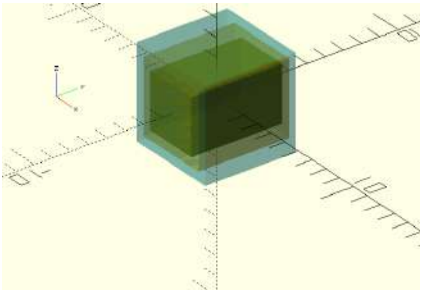

Рисунок 9 - Пример Пифагоровой тройки в трехмерном пространстве. Соблюдена лишь осевая симметрия. Фигура, соответствующая с позиции теории множеств арифметическому выражению (5^2 ¥ 4^2 = 3^2) x 5^1

Множество слоёв. Эквивалентность. Симметричность фигуры. Известно, что если на некотором множестве A определено отношение эквивалентности, то существует такое *разбиение* множества A на непустые подмножества, при котором каждый класс разбиения состоит из всех попарно сравнимых элементов. Обратно, для любого разбиения A на непересекающиеся непустые классы существует такое отношение эквивалентности на A, что классы разбиения будут классами попарно сравнимых элементов [8]. ∀ слой S_i из U может быть разбит на попарно непересекающиеся *классы* d - соответствующих размерностей *p*:

$$S = \cup\, d_i\ \forall\, i \neq j \quad d_i \cap d_j = \varnothing \tag{8}$$

где в качестве класса выступает уже знакомый *кубоид* $d_i = m^k\ 1^{n-k}$, где m – его целочисленное ребро, n – размерность пространства, k – натуральное число не более n. Все слои в гиперкубе $c^n = U$ имеют одну и ту же структуру и один и тот же набор классов - можно составить таблицу соответствия для отношения G, как на рисунке ниже для гиперкуба размерности три, но результат легко обобщается на случай n-мерного пространства:

Рисунок 10 - Функция *A* = G(*C*) должна оперировать с попарно сравнимыми элементами, отдельно по каждому классу разбиения подмножеств *A* и *C*

Два элемента сравнимы тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному классу $d_i = m^k 1^{n-k}$. Если функция *A* = G(*C*) существует, то она должна оперировать с попарно сравнимыми элементами отдельно по каждому классу разбиения подмножеств *A* и *C*. Поскольку мощность каждого следующего слоя S_i больше предыдущего S_{i-1}

(нумерация происходит от центра к периферии), то результатом функции эквивалентности $G(S_i) \in C$ будет некоторое множество последовательно следующих слоёв $\{...S_j...\} \in A$.

Сфокусируем внимание на *ограничении отношения* до одного конкретного слоя $G|_{Si} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \ \mathbf{x} \in \{S_i\} \wedge \{S_i\} \in C, \mathbf{y} \in A\}$ и зададимся вопросом, во что отобразится один слой из C? На рисунке выше выделен слой S_i в подмножестве слоёв C в формуле, описывающей гиперкуб в виде цепи. Ограничение подобно трафарету, а для поколения цифровой эпохи и сетей, можно прибегнуть к иной аналогии: ограничение подобно фильтрации IP адресов. Поскольку из всех возможных подстановок ранее были отфильтрованы лишь те, которые сохраняют свойство центральной симметричности фигуры, постольку результатом действия функции $G(S_i)$ будет фигура, также обладающая центральной симметричностью. Отбраковывая варианты, нарушающие центральную симметрию фигуры, получим либо множество слоёв в *A,* либо всё подмножество *A* в целом, в зависимости от соотношения мощностей $|S_i|$ и $|A|$ подмножеств. По мере детализации разбиения фигуры, увеличения масштаба w и уменьшения толщины слоёв можно добиться ситуации, когда единственный слой из C отображается в множество последовательно следующих слоёв в *A,* исключая e_0, что существенно упрощает анализ: все сопоставляемые слои имеют одну и ту же структуру, форму.

Важно отметить, что мощность $|S|$ - это число гиперкубиков в слое, и одновременно его объём в R^n, а в силу отношений эквивалентности, взаимной однозначности между гиперкубиками из подмножеств C и A:

$|S_i| = |S_k| + |S_{k-1}| + |S_{k-2}| \ldots$ – это соотношение содержит один слой из C и натуральное число слоев из A, при этом ни один из слоёв не может быть задействован в отношениях эквивалентности G частично, иначе произойдет неустранимый дефект фигуры, будет нарушено отношение эквивалентности для некоторых гиперкубиков. (В терминах геометрии описанная ситуация характеризуется как разрыв в следовании слоёв, их неполное заполнение - антипод непрерывности.) Этот случай наперёд был исключен путем фильтрации лишь *допустимых* подстановок (см. рассуждения выше и Рис. 10). Поэтому слои $S_k, S_{k-1}, S_{k-2}, \ldots$ должны следовать непрерывной цепью. В пределе в (5) гиперкубик в начале координат e_0 можно заменить на пустое множество Ø - и это не повлияет на сделанные выводы.

Из рисунка 10 легко понять, что обеспечить одновременное соответствие элементов слоя больше, чем по одному классу невозможно. Все классы имеют разные размерности одного и того же ребра *кубоида* i^k, сомножитель 1^{n-k} можно отбросить как безразмерный коэффициент в силу принципа соответствия (см. выше), и поэтому равенство по одному классу исключает равенство по другому классу в силу выводов, сделанных по итогам анализа системы уравнений формулы (4).

Следовательно, для n = 2, где отношение $\mathbf{y} = G(\mathbf{x})$ ограничивается только на классе одномерных рёбер, Пифагоровы тройки существуют, а для n =3, где отношение эквивалентности работают одновременно на классах граней и рёбер – нет. Аналогичный вывод о невозможности отношения эквивалентности $A = G(C)$ следует и для n- мерного случая, где сравниваются элементы из классов общим числом n-1. Это значит, что для ∀ разбиения большого гиперкуба c^n ∃! функция G, сохраняющая центральную симметрию и непрерывность слоёв, для которой $|A| \sim |C|$ арифметические операция над мощностями слоёв недопустимы в силу отсутствия отношений эквивалентности (лишено смысла сравнение *несопоставимых* объектов). Математики Древней Греции ввели понятие *несоизмеримости* отрезков. С этих позиций каждый слой S_i несоизмерим с другим S_j в пространстве целых чисел размерности свыше двух, аналогичное верно и для множеств непрерывно следующих слоёв $\{\ldots S_i \ldots\}$ и $\{\ldots S_j \ldots\}$.

Налицо *апория* - вымышленная, логически верное высказывание, которое не может существовать в реальности, подобное суждение фиксирует несоответствие эмпирического факта и описывающей его теории. Фигура, соответствующая арифметическому выражению (1) при n > 2, не существует в природе, а тройку кубов с целочисленными ребрами, *a, b, c* нельзя вписать друг в друга. Этот вывод не зависит от масштаба w и разбиения *большого* гиперкуба на слои, а следовательно, рациональных числах решения теоремы Ферма также не существует - хотя бы одно из тройки числе должно быть иррациональным. Теорема Ферма доказана сугубо формальными математическими методами. (Впервые приведённое доказательство было опубликовано в записях базы данных для ЭВМ и депонировано автором в Роспатент [9]) как паллиативного способа регистрации научного открытия в условиях *правовой лакуны* [10].

Рисунок 11 - Фото гиперкуба деревянного 3D на подставке с доказательством Великой теоремы Ферма. Дата заявки 20.03.2021 патента на пром. образец № 2021501435/49 [11]

Пронзание или сечение?

Формула (5) - это результат исследования гиперкуба “одномерным зондом”. Она может быть выведена из определения слоя (3) или Декартова произведения цепи отрезков. Для наглядного сравнения в фильме приводится сечение трёхмерного куба двумерной плоскостью и *пронзание* многомерного куба аналогичной двумерной плоскостью. Тезис о пронзании, а не сечении гиперкуба двумерной плоскостью легко понять из формулы двух плоскостей, натянутых на ортогональные друг другу векторы:

$$\alpha 1 * X1 + \beta 1 * X2 \neq \alpha 2 * X3 + \beta 2 * X4, \qquad (9)$$

здесь строчные литеры X обозначают единичные векторы, построенные на основе осей x1, x2, x3, x4 соответственно, коэффициенты α и β -это произвольные действительные числа. Из это формулы следует, что лишь в трёхмерном кубе две ортогональные друг другу плоскости могут иметь прямую пересечения, одновременно принадлежащую обеим плоскостям. В четырёх и более размерном пространстве плоскости, пересекающие в начале координат, имеют лишь одну общую точку (всего число различных двумерных плоскостей в гиперкубе вычисляется из числа сочетаний $C^2_n = n(n-1)/2$.) С позиции наблюдателя Фёдора, стоящего у самой начала координат на одной пронзающей гиперкуб двумерной плоскости, другая представляться нульмерной точкой - пятном, подобно тому каким видит дуло ружья целящийся в мишень стрелок. Такую точку легко "охватить игольчатым ушком". Именно поэтому двумерная плоскость не рассекает гиперкуб на несвязные части, а лишь *пронзает* его.

Следствия и обобщения. С философских позиций в Великой теореме Ферма заложен конфликт между *содержанием* (объёмом) вложенных друг в друга гиперкубов и их *формой*: условие о центральной симметричности и непрерывности следования слоёв. Можно добиться соответствия содержания в ущерб форме и наоборот. Этот конфликт преодолевается лишь в двумерном пространстве, где существуют Пифагоровы тройки, как редкое явление *гармонии*. Такая ситуация напоминает фундаментальное *соотношение неопределённост*и Гейзенберга в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного измерения пары физических величин, описывающих систему, как например, импульс и положение частицы.

В 1900 году немецкий математик Давид Гильберт сформулировал в своём докладе на II Международном конгрессе математиков двадцать три нерешенные задачи-проблемы, решение которых должно было быть целью математической науки XX века, среди них под номером десять проблема была сформулирована предельно просто [12]:

«Пусть задано Диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых, рациональных числах.»

Заметим, что Великая теорема Ферма как раз-таки является Диофантовым уравнением. Алгоритмическую неразрешимость *Десятой проблемы Гильберта* доказал Юрий Владимирович Матиясевеч в 1970г. в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН [13]. Это доказательство выходит далеко за рамки школьной математики, но основные идеи изложены в версии для школьников [14], что очень важно для популяризации математики среди юношей и девушек. Вместе с тем, можно уверенно утверждать, что некоторые виды Диофантовых уравнений не имеют решения, исходя лишь из их общего вида и проверки на наличие возможного конфликта между формой и содержанием фигуры, соответствующей управлению. Например, развивая примененный выше подход, приходим к выводу: для любых *рациональных коэффициентов* α, β, γ . . . (конечное число коэффициентов) следующее уравнение неразрешимо в целых:

$$\alpha(a^n - b^n) + \beta (c^n - d^n) + \gamma (e^n - f^n) + \ldots = 0 \tag{10}$$

И можно обобщить вывод о неразрешимости на рациональные числа Q (если бы существовало решение в рациональных числах, то за счет масштаба w нашлось бы решение и в целых числах). Этот заключение основано на том, что множество центрально симметричных слоёв (симметрия очевидно вытекает из самой формулы) не является счётно-аддитивным, и операция по сравнению мер фигур (проще говоря объёмов) не допустима. В математике *мера* -это функция, присваивающая неотрицательное действительное число или +∞ (некоторым) подмножествам множества. Мера должна быть *счётно аддитивной*: если некоторое множество можно разложить на конечное (либо *счётно-бесконечное*) число непересекающихся подмножеств, которые измеримы, то исходное подмножество также будет измеримо, а его мера определяется путём суммирования мер подмножеств. Для случая множества слоёв приведённое в сокращенном виде аксиоматическое определение меры вступает в конфликт с формой слоя и свойством центральной симметрии Фигуры. Выходит, что для доказательства Великой теоремы достаточно определения слоя, лишь одной формулы (5) и глубокого понимания основополагающих принципов *однородности, изотропности, симметрии* заложенных в аксиомах Евклидова пространства, которые вытекают из физики Вселенной.

Другой пример - обобщение Великой теоремы Ферма на уравнение вида $a^k + b^l = c^n$, где k, l, n - натуральные числа, требуется отыскать решение в целых: a, b, c, кроме тривиальных нулевых значений. В пространстве Z^n это уравнение следует записать так, чтобы привести к общей размерности. С учетом "постулатов Евклида с позиции цифровизации" (см. Табл. 1) уравнение принимает вид:

$$a^k * 1^{n-k} \pm b^l * 1^{n-l} = c^n \qquad (11)$$

При этом не меняя общности, считаем, что $k \le l \le n$ (возможны переименование переменных и перенос в другую часть уравнения с изменением знака). Далее следует совместить центры трёх *кубоидов* с началом координат, а их грани расположить перпендикулярно осям. При этом следует добиться максимальной *степени симметрии фигуры*, как описано ниже.

Таблица 4 - Пример. Симметричность в четырёхмерном пространстве n = 4

Симметрия относительно:	Симметричность относительно подпространства ⊥ размерностью	Симметричность вдоль под-пространства ‖ Размерностью (степень симм.)	Во что отобразится точка с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4)
I	II	III = n - II	IV
Куба по осям X_1, X_2, X_3	3	1	$(x_1, x_2, x_3, -x_4)$
Плоскости X_1, X_2,	2	2	$(x_1, x_2, -x_3, -x_4)$
Оси X_1	1	3	$(x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$
Точки в начале координат и в центре всех гиперкубов	0	4	$(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$

Под *степенью симметрии* понимается значение колонки III этой таблицы. Легко убедиться, что для фигур, являющихся композицией элементов разной степени симметрии, итоговый показатель симметрии всей фигуры определяет элемент с минимальным значением.

В школе и вузе на уроках физики, геометрии, черчения, инженерной графики или 3D моделирования учащиеся привыкли работать с осевой симметрией, симметрией относительно плоскости, построенной на определенных осях, а также с центральной симметрией. Легко обобщить приведенную выше таблицу на n-мерный случай. Заметим, что размерности подпространств во втором и третьем столбце таблицы дополняют друг друга до размерности пространства, то есть, до n.

Если фигура, соответствующая приведенной формуле (11), допускает *пронзание* вдоль подпространства симметрии (колонка III) хотя бы трёхмерным зондом, а тем более подпространством более высокой размерности, то в фигуре имеется конфликт между формой и содержанием, как для случая трёхмерного куба и центральной симметрии (см. логику доказательства Великой теоремы Ферма выше).

В самом деле, сравнение мер (объемов) частей фигуры, соответствующей Формуле (11) - это значит отыскание функции эквивалентности, отображающей Фигуру в саму себя. Из Табл. 4 следует, что при этом сохраняются объемы, линейные размеры, а следовательно, и свойство симметрии любой степени для ∀ точек I и II в Фигуре имеем:

$$\Delta V_I = \Delta x_1 * \Delta x_2 * \Delta x_3 * \Delta x_4 \dashrightarrow \Delta V_{II} = \Delta x_1 * \Delta x_2 * \Delta x_3 * \Delta x_4 \qquad (12)$$

(Все сомножители в сравнении объемов перемножаются независимо, а знак Δx не принимается во внимание). Это иллюстрирует важный принцип: функция эквивалентности отображает элементы слоя в подпространстве зонда таким же образом, как и во всей фигуре, которую исследует зонд. (Его можно математически строго обосновать с позиции теории множеств и бинарных отношений, но для понимания достаточно приведенной выше формулы.)

Для трёхмерного куба функция эквивалентности работает над двумя классами попарно сравнимых элементов и именно это вызывает противоречие, как показано выше на Рис. 10.

Если максимальная степень симметрии в формуле (11) равна двум, то располагая гиперкубы как описано выше и пронзая Фигуру двумерным зондом, мы получим соизмеримые слои. В самом деле: $a^2 * 1^{n-2} \pm b^2\ b^{l-2} * 1^{n-l} = c^2 * c^{n-2}$ равносильно соотношению между множествами слоёв $|\{...S_i...\}| = u * |\{...S_j...\}| \pm v * |\{...S_k...\}|$, где $u = -b^{l-2}$, $v = c^{n-2}$ - то есть целые числа, при этом мощность множества или площадь каждой из трёх двумерной трапеции, определяется через произведение длины средней линии (это как раз индекс слоя для двумерной плоскости в метрах) на соответствующую высоту, например, в нанометрах имеем: $i*h_i = j*h_j, + k*h_k$. (см. Рис. 7). Выберем h_i = НОК(j,k) и сократим обе части уравнения на это число. Общеизвестно из школьного курса математических классов, что такое линейное уравнение имеет бесконечное число решений относительно h_j, h_k в целых числах. Как и в примере Пифагоровой тройки в n - мерном пространстве с соблюдением симметрии относительно кубоида, ортогонального плоскости (см. Рис. 9.), уравнение (11) <u>может иметь решение</u>, когда итоговый показатель симметрии всей фигуры равен двум. Но какие именно это будут a,b,c,d ? - этот вопрос остается открытым.

Гипотеза Леонарда Эйлера. В 1769 году Леонард Эйлер, предположил, что увеличив число слагаемых в уравнении, аналогичном теореме Ферма до четырёх, пяти и т.д., когда степень n превышает суммарное количество сравниваемых гиперкубов слева и справа в Диофантовом уравнении, исследователь обязательно придёт к выводу о его неразрешимости. Ряд учёных-математиков и любителей опровергли эту гипотезу для случая 4-х 5-ти, 7-ми, 8-ми мерных гиперкубов. Необычайно красивая коллекция алгебраических и арифметических выражений приведена в [15]. (Способ разложения одного хексеракта на пять других хексерактов всё ещё дожидается своего звёздного часа).

Другое обобщение теоремы Ферма на случай четырёх гиперкубов приводит к Диофантову уравнению в виде: $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. С помощью теории множеств и Диаграмма

Эйлера-Венна, предполагая d > c > b > a, можно представить выражение из суммы четырех гиперкубов как:

$$d^4 \setminus c^4 = b^4 \cup a^4 \qquad (13)$$

здесь слева - множество гиперповерхностей размерности n = 3, справа - объединение двух гиперкубов размерности n=4. Четвертый гиперкуб a^4 получается путём операций над слоями из b^4, но произведенных с отступлениями от принципов симметрии степени три. Прозондируем фигуру, соответствующую (13) трёхмерным зондом. Представим себе полый трёхмерный куб с утолщенной стенкой, это разность множеств d^4 ¥ c^4, далее поместим в центр гиперкуб b^4. Согласно доказанной выше теореме Ферма имеется дисбаланс между подмножествами $(d^4 \setminus c^4) \setminus b^4$. Следовательно, есть шансы из дефектов слоёв (частичное удаление слоя) создать некую фигуру, возможно a^4, но в любом случае в результате проведённого зондирования обнаружилось нарушение симметрии. Если эту новую фигуру разместить в области положительных значений осей, то при отражении от гиперплоскостей и масштабировании число гиперкубов b^4 увеличивается в 2^n, то есть в 16 раз, при этом фигура становится *несвязной*. Этим новая модель радикально отличается от ранее рассмотренной комбинации из трёх вложенных кубов со степенью симметрии n. (Прежде всего, нарушается условие об однородности пространства, см. внимательнее на гиперкубы b^4). А что можно сказать относительно двумерного зондирования? Расположим четыре тессеракта так, чтобы добиться максимальной симметрии ниже трёх - т.е. степени два, плоскости на осях X_1, X_2 (помним, что обе оси X_3, X_4 перпендикулярны этой плоскости.)

Рисунок 12 - Разрешимо ли Диофантово уравнение $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$?

Поскольку ∀ слой S_i *соизмерим* с другим S_j, построим плоскость на основе осей X_1, X_2 (для сокращения обозначим её как X_1 x X_2 - Декартово произведение осей. Для удобства представления выберем двумерные проекции $d^4 \setminus c^4$ на плоскость, проведенную через X_3, и ортогональную X_1 x X_2, а проекцию гиперкубов $b^4 \cup a^4$ - на плоскость, проведённую через X_4, также ортогональную X_1 x X_2 .(Отличительным от прочих цветом и штриховкой выделен объём / мера c^4, вычитаемая из d^4.) Заметим, что двумерные проекции всех гиперкубов симметричны относительно вертикальных плоскостей, и эта степень симметрии равна двум (двумерный зонд). Конфликт между формой и содержанием, как для случая трёхмерного куба и центральной симметрии, отсутствует. Убедимся в возможности достичь равенства объемов (мер) послойно, с соблюдением симметрии относительно вышеперечисленных плоскостей. Для этого, двигаясь от центра к периферии в плоскости X_1 x X_2, последовательно получим соотношения:

$\Delta V_1 = \Delta V_2$

$(a^2 + b^2)S_i * h_i = (d^2 - c^2)S_j * h_j$ или

$(a^2 + b^2)S_i * h_i = d^2 S_j * h_j$ или

$b^2 S_i * h_i = (d^2 - c^2)S_j * h_j$ или (14)

$b^2 S_i * h_i = d^2 S_j * h_j$
(выбор уравнения зависит от диапазона индексов i, j и соотношения рёбер гиперкубов.)

где S_i, S_j - это слои в двумерной плоскости $X_1 \times X_2$ в сравниваемых парах гиперкубов d^4 и b^4 с одной стороны c^4 и a^4 - с другой. С учетом сказанного о Пифагоровых тройках в n -мерном пространстве в формуле (7) и на Рис. 9, каждый двумерный слой необходимо умножить на рёбра, перпендикулярно расположенного кубоида, относительно которых этот слой симметричен. Для треугольника на плоскости $|S_i| = i$ см. Рис. 7. При этом разных диапазонах индекса сомножители в (14) могут быть разными, но для $\forall$ i, j $\exists$ разбиение и достаточно большой масштаб w, такие, что целые числа h_i , h_j будут связаны той или иной строкой в (14), например для первой строки $h_i = h_j (d^2 - c^2)\, j \,/\, (d^2 - c^2)\, i$. Умножая масштаб на знаменатель дробной часть последнего выражения, можно избавиться от дробных чисел. В результате такого преставления Фигура будет иметь симметрию второй степени и любые слои в ней окажутся *соизмеримыми,* что указывает на потенциальную возможность отыскать четыре гиперкуба с целочисленными рёбрами для (13).

Описанный на последнем примере способ определения разрешимости является необходимым, но недостаточным условием для поиска положительного ответа на вопрос. На предпоследнем примере - достаточным условием для формулировки вывода о неразрешимости Диофантова уравнения.

Приведенное ниже численное решение в целых, его обнаружил - американский математик, профессор математики Гарвардского университета Но́ам Дэ́вид Э́лкис в 1988г. [16]. Поскольку числа большие и электронная таблица из пакета офисных программ с ними не справится, текст листинга программы Fermats_family.py можно скопировать и запустить на Python, например в любом из популярных онлайн трансляторах:

```
================== Листинг 2 Fermats_family.py ===================
a = 95800
b = 217519
c = 414560
d = 422481
print("Расчет суммы 4-х мерных гиперкубов")
print(' a = %d b = %d ; a^4 + b^4 = %d' % (a, b, a**4 + b**4))
print('c = %d d = %d ; c^4 - d^4 = %d' % (c, d, d**4 - c**4))
Результат исполнения программы.
Расчет суммы 4-х мерных гиперкубов
a = 95800 b = 217519 ; a^4 + b^4 = 2322892439815904960321
c = 414560 d = 422481 ; c^4 - d^4 = 2322892439815904960321
=================================================================
```

как легко убедиться результаты вычисления правой и левой частей совпадают.

Заключение: о роли творческого воображения. Принципы однородности, изотропности пространства, свойства симметрии исследуемой фигуры стали для автора ключевыми идеями для поиска краткого наглядного доказательства Великой теоремы. Метод *геометрической алгебры*, оперирующий понятиями совмещения, перемещения, поворота фигур хорошо известен в науке уже 23 столетия. В отличие от современников Пьера де Ферма, учащиеся XXI века располагают богатыми возможности

3D-моделирования и визуализации, облегчающими творческий поиск и численную проверку гипотез.

Французский математик Клод Чаботи (Claude Chabauty) в 1938 г. защитил докторскую диссертацию по теории чисел и алгебраической геометрии, активно применял методы симметрии пространств (подпространств) при анализе Диофантовых уравнений, ещё в середине XX века.

Хотя *Десятая проблема Гильберта* не имеет алгоритмического решения, но это не исключает возможности поиска на основе общих знаний физики, законов симметрии, аналогии, интуиции, эстетики. Для сравнения: игра в Го не поддается алгоритмическому решению, но на основе нейросетей команда Deepmind сообщила о создании новая модели нейронной самообучающейся сети AlphaGo Zero - непревзойдённого "монстра" - игрока в шахматы и Го. Новая версия не только сокрушительно обыгрывает прошлые версии самой себя, но ещё и не требует никакого человеческого участия в процессе машинного обучения [16]. Автор полагает, что решение Диофантова уравнения в общем случае относится к невычислимым задачам.

По словам Альберта Эйнштейна «фактов в жизни предостаточно - не хватает лишь немного фантазии». Междисциплинарный подход позволил отыскать креативное доказательство, основные идеи которого, по выражению Пьера де Ферма, можно разместить как на *широких полях Диофантовой математики.* А в цифровую эпоху - на гранях обычного деревянного либо виртуального кубика [17].

Миньон Ким, [Minhyong Kim] математик из Оксфордского университета, исследуя скрытую арифметическую симметрию Диофантовых уравнений, утверждает: «Должен быть способ использовать физические идеи для решения задач в теории чисел, но мы пока ещё недостаточно хорошо продумали то, как создать подобную платформу. Мы находимся в таком состоянии, когда наше понимание физики достаточно хорошо развито, и в нём заинтересовано достаточное много специалистов по теории чисел для того, чтобы сделать следующий шаг». По мнению учёного, этот шаг произойдет уже в течение ближайших 15 лет, он считает: «В наше время практически невозможно интересоваться геометрией и топологией, ничего не зная о физике [18]. Возможно, кто-то из читателей внесёт и свою лепту на этом интересном поприще. Посмотрите восхитительные графики Миньона Кима, касающиеся решения уравнения $x^4 + y^4 = 1$, в комплексных числах в виде тора с тремя отверстиями.

Файлы, создающие 3D фигуры в настоящей статье, можно свободно скачать и запустить в OpenSCAD на курсе *Физика для менеджеров* сайта Массовых открытых онлайн курсов https://univer.emediator.ru/ Там же - форум для обсуждения и упражнения [17].

Список литературы

1. Начала Евклида, Книги II. Перевод с греческого и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н.Веселовского. Эвклид М. Л., ГТТИ, 1948. с. 123-142

2. Nigel Boston University of Wisconsin—Madison The Proof Of Fermat's Last Theorem. Spring 2003 p 4-140 Ref. math.wisc.edu/~boston/869.pdf доступ 29.09.2021

3. Коллективная монография «Обучение и воспитание детей и подростков: от теории к практике: М.А Авдыев с. 330-348 / отв. ред. А.Ю. Нагорнова. – Ульяновск: Зебра, 2020.

4. Учебный Фильм "Великая теорема Ферма для миллиардов обычных людей" https://www.facebook.com/edogovor/videos/393973561944576 доступ на 03.01.2021

5. М.А. Авдыев Восхождение к вершине гиперкуба издательство Ridero 2020

6. Аудиокнига Восхождение к вершине гиперкуба издательство и теорема Ферма с закрытыми глазами.

7. OpenSCAD - это программа для создания твердотельных 3D-моделей САПР. Это свободное программное обеспечение распространяется под лицензией General Public License версия 2, Мариусом Кинтелом (Marius Kintel), работает под операционными системами Linux / UNIX, Windows и Mac OS X сайт openscad.com доступен на 03.01.2021

8. См. Стр. 26-27. Белова, Л. Ю. “Элементы теории множеств и математической логики.” Теория и задачи: учебное пособие Ярославский госуниверситет 2012. ISBN 978-5-8397-0878

9. Свидетельство БД для ЭВМ 2020621077 приоритет установлен 11.03.2020.

10. Заявка на получение патента на промышленный образец № 2021501435/49 Дата подачи заявки 20.03.2021 Заявитель(и) Авдыев Марат Александрович название пром. образца “Гиперкуб трёхмерный деревянный на сборной стойке с доказательством Великой теоремы”.

11. Согласно ст. 44 Конституции РФ интеллектуальная собственность охраняется законом. Между тем, постановление Совмина СССР от 21.08.1973 N 584 "Об утверждении Положения об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях" утратило силу на территории РФ с 01.01.2021 в связи с изданием Постановления Правительства РФ от 03.02.2020 N 80. Работа “регистраторов открытий” РАЕН - МААНОиИ от имени РФ в системе российского и международного права (ВОИС, Женевский договор и др. ратифицированы РФ) в рамках определенной ими “совместной деятельности”, происходит без законных оснований и вне рамок Конституции РФ.

12. David Hilbert. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 (нем.). — Текст доклада, прочитанного Гильбертом 8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков в Париже.

13. Ю.В.Матиясевич. Диофантовость перечислимых множеств. – Доклады АН СССР, том 191, вып. 2, с. 279–282, 1970. ссылка по сост. На 03.11.2021: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/MATIYASEVICH_Yuriy_Vladimirovich/MatiyasevichYu.V.Desyataya_problema_Gil'berta.(1993).[djv-fax].zip

14. Ю. В. Матиясевич, Десятая проблема Гильберта, Журнал Квант, 2021,номер 2, 2–8.

15. A Collection of Algebraic Identities By Tito Piezas III ссылка по состоянию на 03.11.2021 см. https://sites.google.com/site/tpiezas/Home

16. Наварро, Хоакин. Неуловимые идеи и вечные теоремы. Великие задачи математики. - М.: Де Агостини, 2014. - С. 84. - 160 с.

17. Учебный курс “Физика для менеджеров” См. Ссылку https://univer.emediator.ru/moodle/course/view.php?id=39 по состоянию на 03.11.2021

18. Secret Link Uncovered Between Pure Math and Physics By Kevin Hartnett December 1, 2017 https://www.quantamagazine.org/secret-link-uncovered-between-pure-math-and-physics-20171201/ там же имеется подкаст статьи на английском языке.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абрамова Наталья Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Саратовская государственная юридическая академия» (г. Саратов, Россия).

Авдыев Марат Александрович – выпускник аспирантуры, социолог, тренер-медиатор, директор, Союз «Сибирский Центр медиации» (г. Новосибирск, Россия).

Агабалаева Джульетта Шихжейнетовна – ассистент, ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России (г. Ростов-на-Дону, Россия).

Акименко Галина Васильевна – кандидат исторических наук, доцент, доцент кафедры психиатрии, наркологии и медицинской психологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Албитова Екатерина Петровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры административного права и таможенного дела, ФГБОУ ВО «Забайкальский государственный университет» (г. Чита, Россия).

Александрова Марина Викторовна – профессор, доктор педагогических наук, профессор кафедры начального, дошкольного образования и социального управления, Институт непрерывного педагогического образования, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» (г. Великий Новгород, Россия).

Алексеева Ирина Александровна – кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры менеджмента наукоемких производств; доцент кафедры менеджмента и ГМУ, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»; ЧОУ «Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики» (г. Санкт-Петербург, Россия).

Алексеева Ольга Вячеславовна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры профессионального педагогического образования и социального управления, Институт непрерывного педагогического образования, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» (г. Великий Новгород, Россия).

Атласова Саргылана Серафимовна – кандидат исторических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет» (г. Якутск, Россия).

Балыкина Анна Михайловна – кандидат психологических наук, доцент, зав. кафедрой, АНО ВО «Российский новый университет» (г. Москва, Россия).

Баранов Владимир Михайлович – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры стратегического управления, ФШБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова» (г. Белгород, Россия).

Белавкина Марина Валерьева – кандидат педагогических наук, доцент, Академия физической культуры и спорта, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» (г. Ростов-на-Дону, Россия).

Белецкая Елена Витальевна – старший преподаватель, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Россия).

Болдырева Ирина Ивановна – кандидат исторических наук, доцент, доцент кафедры гуманитарных дисциплин, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет им. Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Болотских Владимир Иванович – доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Бондарева Евгения Петровна – кандидат филологических наук, доцент, преподаватель русского языка, Beijing Language and Culture University (Beijing, China).

Василевская Елена Александровна – кандидат психологических наук, доцент кафедры педагогики, психологии и психолингвистики, ведущий специалист центра оценки и развития компетенций, ФГБОУ ВО «Самарский государственный медицинский университет Министерства здравоохранения Российской Федерации» (г. Самара, Россия).

Гарашкина Наталья Владимировна – доктор педагогических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный областной университет» (г. Москва, Россия).

Гребенникова Ирина Валерьевна – кандидат медицинских наук, доцент кафедры патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Грицук Александр Иванович – доктор медицинских наук, профессор, зав. кафедрой общей, биоорганической и биологической химии, ОУ «Гомельский государственный медицинский университет» (г. Гомель, Беларусь).

Догучаева Танзиля Ахматовна – заместитель директора института педагогики, психологии и физкультурно-спортивного образования, старший преподаватель, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет» (г. Нальчик, Россия).

Донина Ирина Александровна – доктор педагогических наук, доцент, доцент кафедры профессионального педагогического образования и социального управления, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» (г. Великий Новгород, Россия).

Дрожжина Дарья Андреевна – студент, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Россия).

Дрожжина Полина Евгеньевна – студент, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Россия).

Дружинина Анастасия Александровна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики дошкольного и начального образования, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (г. Тамбов, Россия).

Елканова Тамара Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и астрономии, ФГБОУ ВО «Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова» (г. Владикавказ, Россия).

Ессина Ирина Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Саратовская государственная юридическая академия» (г. Саратов, Россия).

Заболотная Светлана Геннадьевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный медицинский университет» Минздрава России (г. Оренбург, Россия).

Задворная Марина Станиславовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры дошкольного образования, Государственное бюджетное учреждение дополнительного профессионального образования «Санкт-Петербургская академия постдипломного педагогического образования» (г. Санкт-Петербург, Россия).

Иванова Светлана Владимировна – кандидат психологических наук, доцент, доцент кафедры педагогики, психологии и психолингвистики, ведущий специалист центра оценки и развития компетенций, ФГБОУ ВО «Самарский государственный медицинский университет Министерства здравоохранения Российской Федерации» (г. Самара, Россия).

Исхакова Альбина Вячеславовна – старший преподаватель кафедры физической культуры, ФГБОУ ВО «Уральский государственный медицинский университете (г. Екатеринбург, Россия).

Кальянова Анна Владимировна – магистр института педагогики и психологии, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (г. Петрозаводск, Россия).

Каркавцева Ирина Александровна – кандидат биологических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Архангельск, Россия).

Кирина Юлия Юрьевна – кандидат медицинских наук, доцент, доцент кафедры психиатрии, наркологии и медицинской психологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Клещева Нелли Александровна – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры общей и экспериментальной физики, ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет» (г. Владивосток, Россия).

Ковальчук Илья Александрович – кандидат психологических наук, доцент кафедры общей и педагогической психологии психологического факультета, Академия ФСИН России (г. Рязань, Россия).

Кондрашихин Андрей Борисович – доктор экономических наук, кандидат технических наук, магистр теологии, профессор кафедры экономики и менеджмента, Институт экономики и права (филиал) ОУП ВО «Академия труда и социальных отношений» в г. Севастополе (г. Севастополь, Россия).

Крейк Альфред Иосифович – кандидат социологических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный университет экономики и управления»; ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет» (г. Новосибирск, Россия).

Кривоносова Людмила Александровна – доктор социологических наук, профессор Профессор кафедры менеджмента и предпринимательского права, Дальневосточный институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (ДВИУ РАНХ и ГС) (г. Хабаровск, Россия).

Кузнецова Юлия Сергеевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» (г. Новороссийск, Россия).

Кулакова Наталья Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева» (г. Красноярск, Россия).

Кулимова Римма Хусеновна – кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора института педагогики, психологии и физкультурно-спортивного образования, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет» (г. Нальчик, Россия).

Лагунова Любовь Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физической культуры, ФГБОУ ВО «Уральский государственный медицинский университете (г. Екатеринбург, Россия).

Лидохова Олеся Владимировна – кандидат биологических наук, доцент кафедры патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Лопатин Андрей Анатольевич – доктор медицинских наук, профессор, профессор кафедры психиатрии, наркологии и медицинской психологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Лущик Марина Валерьевна – кандидат биологических наук, доцент кафедры патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Лысенко Дмитрий Сергеевич – старший преподаватель, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» (г. Ростов-на-Дону, Россия).

Лях Юлия Анатольевна – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры управления, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (г. Москва, Россия).

Макеева Анна Витальевна – кандидат биологических наук, доцент, доцент кафедры патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Маланичева Анна Владимировна – доктор педагогических наук, доцент кафедры общей и социальной педагогики, ФГБОУ ВО «Алтайский государственный педагогический университет» (г. Барнаул, Россия).

Мензул Елена Владимировна – кандидат психологических наук, доцент, зав. кафедрой педагогики, психологии и психолингвистики, директор центра оценки и развития компетенций, ФГБОУ ВО «Самарский государственный медицинский университет Министерства здравоохранения Российской Федерации» (г. Самара, Россия).

Мирзоева Елена Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, декан факультета спортивного менеджмента, педагогики и психологии, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет физической культуры, спорта и туризма» (г. Краснодар, Россия).

Михайленко Ольга Ивановна – кандидат психологических наук, доцент, доктор акмеологии, директор института педагогики, психологии и физкультурно-спортивного образования, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет» (г. Нальчик, Россия).

Моринова Татьяна Петровна – преподаватель кафедры хореографии, факультет искусств, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный институт культуры» (Санкт-Петербург, Россия); аспирант кафедры начального, дошкольного образования и социального управления, Институт непрерывного педагогического образования, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» (г. Великий Новгород, Россия).

Нагорнова Анна Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент, старший научный сотрудник научно–исследовательской части, ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет» (г. Тольятти, Россия).

Начева Любовь Васильевна – доктор биологических наук, профессор, зав. кафедрой биологии с основами генетики и паразитологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Ничагина Анна Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент, ГАОУ ВО ЛО «Ленинградский гоударственный университет имени А.С. Пушкина» (г. Санкт-Петербург, Россия).

Овчинников Юрий Дмитриевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Биохимии, биомеханики и естественно-научных дисциплин», ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет физической культуры, спорта и туризма» (г. Краснодар, Россия).

Орбодоева Лариса Матвеевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры перевода и межкультурной коммуникации, ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет» (г. Улан-Удэ, Россия).

Остроухова Оксана Николаевна – кандидат медицинских наук, ассистент кафедры патофизиологии, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Петровская Мария Владимировна – кандидат психологических наук, доцент, профессор кафедры военно-политической работы, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил, «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж, Россия).

Полежаев Виктор Дмитриевич – доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры общих математических и естественнонаучных дисциплин, Аккредитованное образовательное частное учреждение высшего образования «Московский финансово-юридический университет МФЮА» (г. Москва, Россия).

Полежаева Людмила Николаевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических методов в экономике, ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова» (г. Москва, Россия).

Райхельгауз Леонид Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» (г. Воронеж, Россия).

Рогалева Галина Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры общей педагогики, ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет» (г.Улан-Удэ, Россия).

Романова Марина Михайловна – кандидат медицинских наук, доцент, ассистент кафедры физической и реабилитационной медицины, гериатрии ИДПО, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет имени Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Рязанцева Наталья Михайловна – старший преподаватель кафедры педагогики, психологии и психолингвистики, начальник отдела оценки персонала центра оценки и развития компетенций, ФГБОУ ВО «Самарский государственный медицинский университет Министерства здравоохранения Российской Федерации» (г. Самара, Россия).

Рямова Ксения Александровна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физической культуры, ФГБОУ ВО «Уральский государственный медицинский университете (г. Екатеринбург, Россия).

Селедцов Александр Михайлович – доктор медицинских наук, профессор, профессор кафедры психиатрии, наркологии и медицинской психологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Сергеев Сергей Александрович – кандидат филологических наук, преподаватель русского языка, Beijing Language and Culture University (Beijing, China).

Симакова Татьяна Александровна – кандидат психологических наук, доцент ведущий научный сотрудник научно-исследовательского отдела научного центра, Академия ФСИН России (г. Рязань, Россия).

Степаненко Лариса Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры истории и политологии, ФГБОУ ВО «Новосибирского государственного технического университета» (г. Новосибирск, Россия).

Субботина Марина Михайловна – бакалавр направления подготовки «Организация работы с молодёжью», консультант по рекламе, ООО «РА Паритет» (г. Пермь, Россия).

Тарасенко Алексей Александрович – кандидат педагогических наук, профессор, профессор кафедры физкультурно-оздоровительных технологий, первый проректор - проректор по учебной работе, ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет физической культуры, спорта и туризма» (г. Краснодар, Россия).

Таютина Татьяна Владимировна – кандидат медицинских наук, доцент, доцент кафедры поликлинической терапии, ФГБОУ ВО РостГМУ Минздрава России (г. Ростов-на-Дону, Россия).

Тенищева Вера Фёдоровна – доктор педагогических наук профессор, профессор, начальник кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» (г. Новороссийск, Россия).

Федяев Валентин Анатольевич – магистрант, ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет» (г. Якутск, Россия).

Филипенко Елена Васильевна – кандидат педагогических наук, доцент, Санкт-Петербургский университет МВД России (г. Санкт-Петербург, Россия).

Филиппов Андрей Рудольфович – преподаватель кафедры физической культуры, ФГБОУ ВО «Уральский государственный медицинский университете (г. Екатеринбург, Россия).

Филоненко Виктория Александровна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» (г. Новороссийск, Россия).

Фокина Наталья Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры культурологии и социально-гуманитарных технологий, ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет» (г. Пермь, Россия).

Хачатурова Карине Робертовна – кандидат педагогических наук, учитель физики, руководитель ОДОД, ГБОУ школа №129 Санкт-Петербурга (г. Санкт-Петербург, Россия).

Цыганко Елена Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры иностранных языков, ФГБОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф.Ф. Ушакова» (г. Новороссийск, Россия).

Чернов Алексей Викторович – доктор медицинских наук, доцент, заведующий кафедрой физической и реабилитационной медицины, гериатрии ИДПО, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный медицинский университет им. Н.Н. Бурденко» (г. Воронеж, Россия).

Чистякова Галина Викторовна – кандидат филологических наук, доцент заведующий кафедрой латинского языка и медицинской терминологии, ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный медицинский университет» (г. Кемерово, Россия).

Шерайзина Роза Моисеевна – доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой начального, дошкольного образования и социального управления, ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого» (г. Великий Новгород, Россия).

Щупленков Николай Олегович – кандидат исторических наук, доцент кафедры истории, права и общественных дисциплин, ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт» (филиал в г. Ессентуки) (г. Ессентуки, Россия).

Щупленков Олег Викторович – кандидат исторических наук, доцент кафедры истории, права и общественных дисциплин, ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт» (филиал в г. Ессентуки) (г. Ессентуки, Россия).

Янюшкина Галина Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент, профессор РАЕ, доцент кафедры теории и методики общего и профессионального образования, ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет» (г. Петрозаводск, Россия).

Научное издание

СОВРЕМЕННОЕ ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ: ИДЕИ, ТЕХНОЛОГИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ

коллективная монография

В авторской редакции

Подписано в печать 15.11.2021. Формат 60x84/16
Печать оперативная. Усл. п.л. 28,9
Тираж 1000 экз. Заказ № 73-11-04.

Отпечатано с готового оригинал–макета в издательстве ЗЕБРА
432072, Россия, г. Ульяновск, ул. Жуковского, 83.