Ряды Фурье

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

Формулы половинного аргументы

$$\sin^2(wt) = \frac{1-\cos(2wt)}{2} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \nu = \frac{1}{T}, w = \frac{2\pi}{T}$$

Среднее значение по времени k , m $\in$ Z

$$\frac{2}{T}\left\langle \cos^2(kwt)\right\rangle_t = 1 \qquad \frac{2}{T}\left\langle \sin^2(mwt)\right\rangle_t = 1$$

Среднее значение по времени = 0, где k ≠ m

$$\cos kwt \cos mwt = \frac{1}{2}\left[\cos(k+m)wt + \cos(k-m)wt\right]$$

$$\sin kwt \sin mwt = \frac{1}{2}\left[cos(k-m)wt - cos(k+m)wt\right]$$

Ортогональная система функций

1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, sin3x, cos3x . . . cosnx

$$\int_{-\pi}^{\pi} coskxcosmxdx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} cos(k+m)x + cos(k-m)x\right] = 0$$

$$\frac{1}{m+n} sin(k+m)x \qquad \frac{1}{m-n} sin(k-m)x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinkxsinmxdx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} sinkxcosmxdx = 0$$

где k ≠ m, оба $\in$ Z

$$\langle coskxcosmx\rangle_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \langle sinkxsinmx\rangle_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Ортогональная система функций 2

на интервале [-l, l]

$$1, cos\frac{\pi x}{l}, sin\frac{\pi x}{l}, cos\frac{2\pi x}{l}, sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots cos\frac{k\pi x}{l}, sin\frac{k\pi x}{l} \ldots$$

$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) \ldots + a_n g_n(x) = \sum a_k g_k(x)$ | $* g_k(x)$ и усреднить

$$a_k = \frac{\langle f(x) g(x) \rangle_a^b}{\left\langle g(x)^2 \right\rangle_a^b}$$

$$\mathbf{A} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Любую периодическую функцию f(t) можно представить на T как:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k coskwt + b_k sinkwt$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k cos2\pi k\frac{t}{T} + b_n sin2\pi k\frac{t}{T}$$

где

$$a_0 = \langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

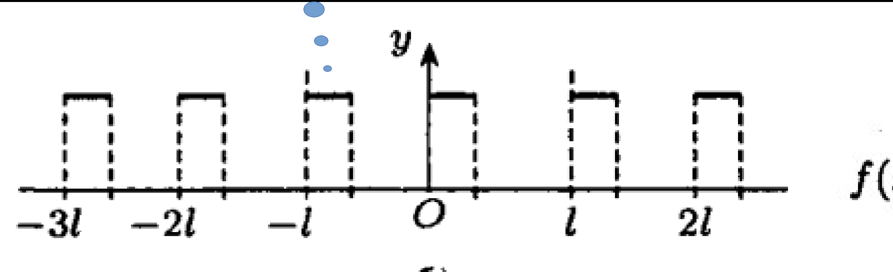
k ≥ 1

$$a_k = \frac{2}{T}\left\langle f(t)cos\frac{2\pi k}{T}\right\rangle = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)cos2\pi k\frac{t}{T}dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\left\langle f(t)sin\frac{2\pi kt}{T}\right\rangle = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)sin2\pi k\frac{t}{T}dt$$

α

Спектр ступенчатого сигнала



$$f(x)=\begin{cases}1 & -l<x<-l+\alpha,\\ 0 & -l+\alpha<x<0,\\ 1 & 0<x<\alpha,\\ 0 & \alpha<x<l,\end{cases}$$

a0 = α / l

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{-l+\alpha}\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{\alpha}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{-l+\alpha}\sin\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{0}^{\alpha}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)$$

α = l/2

$$a_{2k}=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi=0,\qquad b_{2k}=\frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]$$

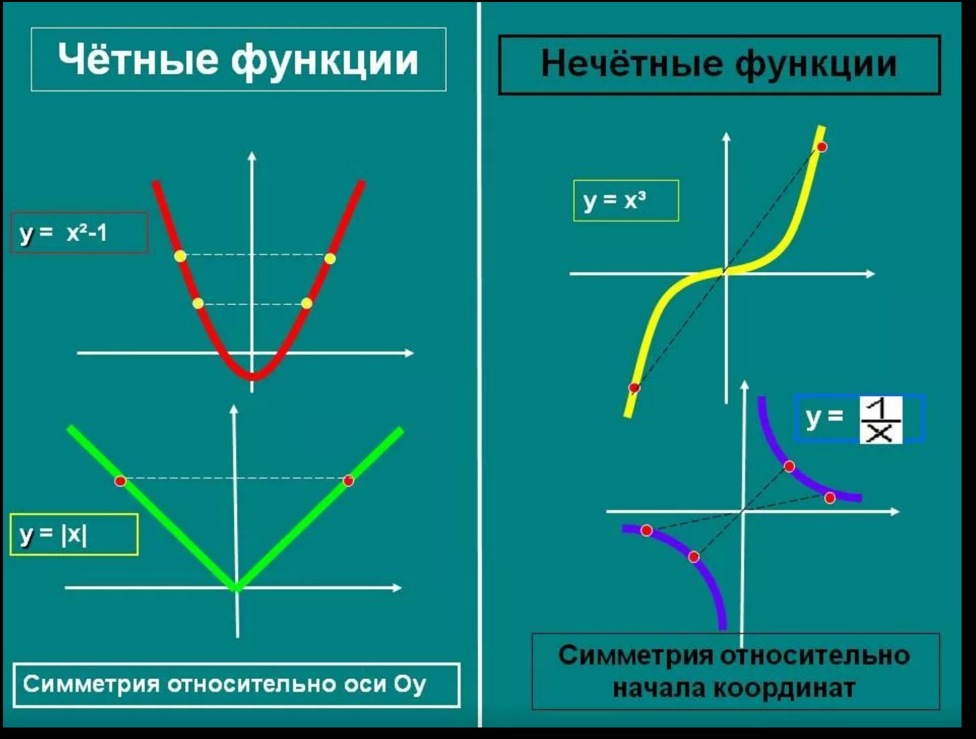
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{l}+\frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{l}\right)\dots$$

Интересные ряды

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Функции чётные и нечётные



xsin(nx) = чётная
x^2cos(mx) = чётная
sinx cosx = нечетная

$$\langle f(t)\rangle_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \langle f(t)\rangle_{0}^{\frac{T}{2}} \ldots 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$\langle f(t)\rangle_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\langle f(t)\rangle_{0}^{\frac{T}{2}} \ldots \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

В комплексной форме функцию f(t) можно представить как:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k\frac{t}{T}}$$

ikwt

$$e^{iwt} = coswt + isinwt$$

где

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-iwt}dt$$

A(w) + iB(w)

$$T \to \infty, w = \frac{k}{2\pi}$$

Если Фурье образ действительный

$$\widehat{f(w)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f(w)}e^{iwt}dw$$

Если Фурье-образ действительный

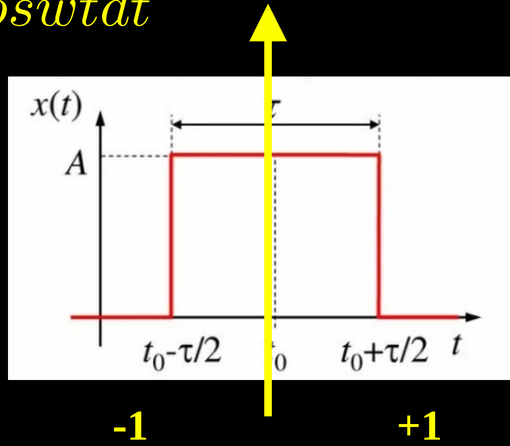
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{A(w)coswt - B(w)sinwt\} + i\{A(w)sinwt - B(w)coswt\}\,dw$$

чёт

нечёт

Фурье-образ прямоугольного сигнала, f(t) — чётная, 2 сек.

$$\widehat{f(w)} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 1 * coswtdt + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty 0 * coswtdt$$



$$\widehat{f(t)} = \frac{sinw}{\pi w}$$

$$f(t) = 2\int_0^\infty \frac{sinw}{\pi w} coswtdw$$

$$f(0) = 1 = 2\int_0^\infty \frac{sinw}{\pi w} dw \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{sinw}{w} dw = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{sinw}{w} dw = \pi$$

Свойства преобразований Фурье

$$\widehat{f_1(w) + f_2(w)} = \widehat{f_1(w)} + \widehat{f_2(w)}$$

$$\widehat{\alpha f(w)} = \alpha \widehat{f(w)}$$

линейная зависимость от параметра

$$\widehat{\dot{f}(w)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-iwt} dt = iw \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = iw\widehat{f(w)}$$

$$\widehat{\ddot{f}(w)} = (iw)^2 \widehat{f(w)}$$

$$\widehat{\int f(w)} = \frac{1}{iw}\widehat{f(w)}$$

сжатие — растяжение по оси

$$f(t) \longrightarrow \widehat{f(w)} \qquad f(\alpha t) \longrightarrow \frac{1}{\alpha}\widehat{f\left(\frac{w}{\alpha}\right)}$$

Фурье образ Дельта-функции

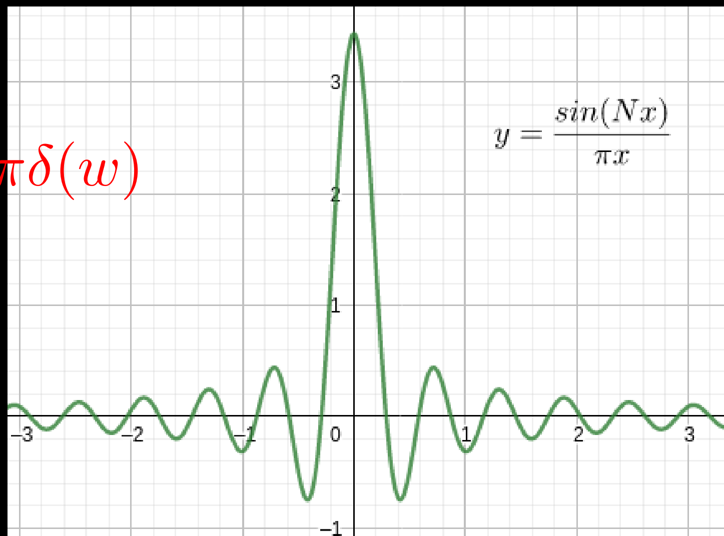
$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{iwt} dt = ?$$

δ(x) = 0
везде кроме 0
δ(0) = ∞
$\int \delta$(x) = 1

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(w) e^{-iwt} dt = 1$$

isinx = ½ (e^{ix} — e^{ix})

$$\int_{-N}^{N} e^{iwt} dt = 2\pi N \frac{sinwN}{N\pi w} = 2\pi\delta(w)$$



Решение дифференциальных уравнений

k/m

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + mw_0^2 x = f(x)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{iwt}dt \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dt$$

$$(-mw^2 + mw_0^2 + iwh)X(w) = F(w)$$

$$X(w) = \frac{F(w)}{-mw^2+mw_0^2+iwh} = K(w) * F(w)$$

Комплексная частотная характеристика есть спектр временной характеристики — отклик на δ(t)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(w)e^{iwt}dt$$

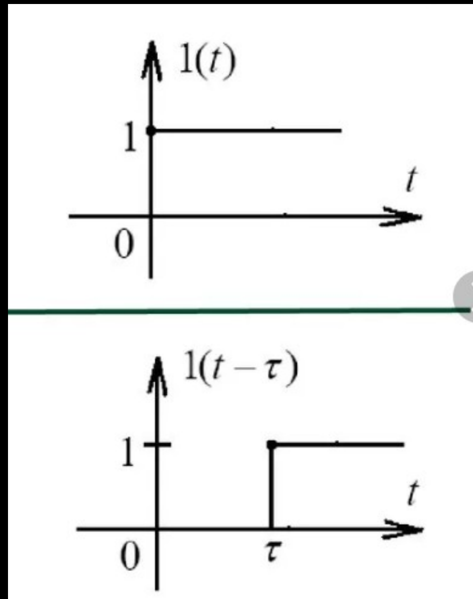
Фурье -образ функции Хевисайда или e(t)

$$e(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sinwt}{w} dw$$

Фурье-образ

$$\frac{1}{2} sign(t) = e(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{w} sinwtdw$$

$$\frac{de(t)}{dt} = \delta(t)$$



Модуляция сигнала, амплитудная модуляция

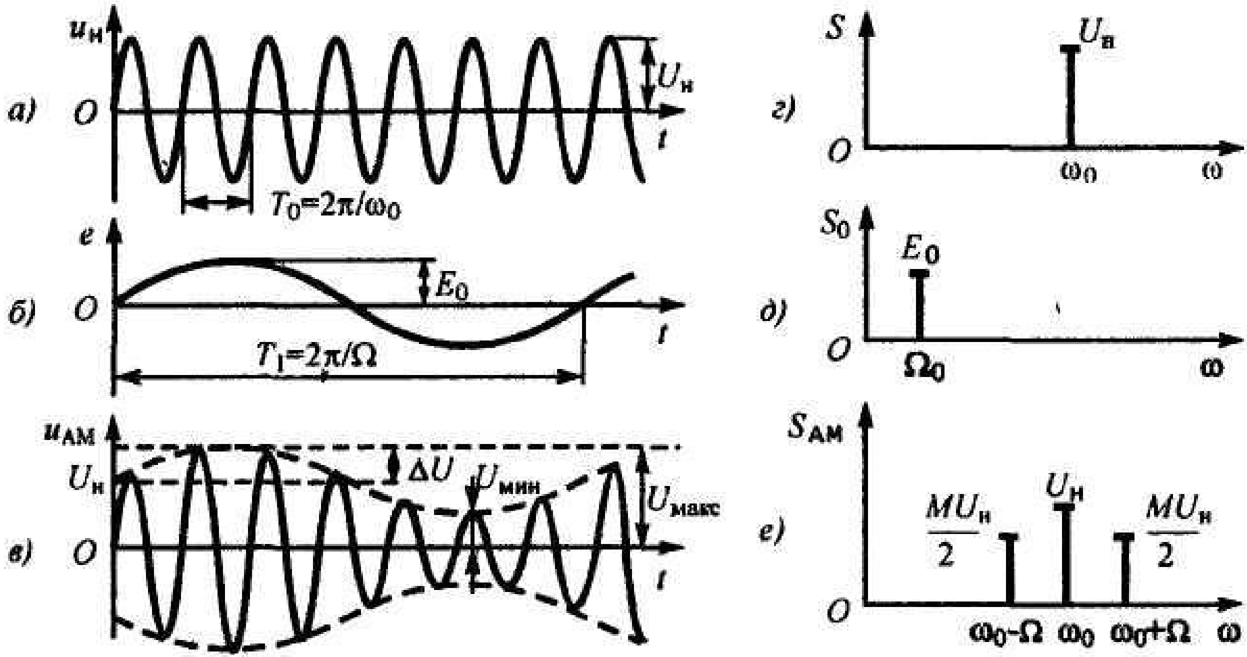


Рис. 2.22. Амплитудная модуляция:
а — несущее колебание; *б* — модулирующий сигнал; *в* — АМ-сигнал; *г* *е* — соответствующие спектры

Ширина спектра? Частотная модуляция.

Равенство Парсеваля

$$\mathbf{A} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

$$\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx = 2l a_0^2 + l \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2\,dk.$$

Сдвиг прообраза и образа (запаздывание и смещение). Свертка

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{t=\infty} f(t-a)e^{-iwt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iw(\tau+a)}d\tau = \widehat{f(w)}e^{-iaw}$$

Исходные преобразования	
$S(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$
$S_\tau=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\,e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega\tau}S$ Теорема запаздывания	$f_\Omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega+\Omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = e^{-j\Omega t}f$ Теорема смещения
$S=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1 f_2 e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu)\,S_2(\omega-\nu)\,d\nu$ Теорема о спектре произведения	$f=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1 S_2 e^{j\omega t}\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$ Теорема о спектре свертки

Свёртка функций

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + mw_0^2 x = \delta(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$X(w) = \frac{F(w)}{-mw^2 + mw_0^2 + iwh} = K(w) * F(w)$$

Теорема Котельникова (Найквиста — Шеннона)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\pi}{\Delta}(t-k\Delta)\right]$$

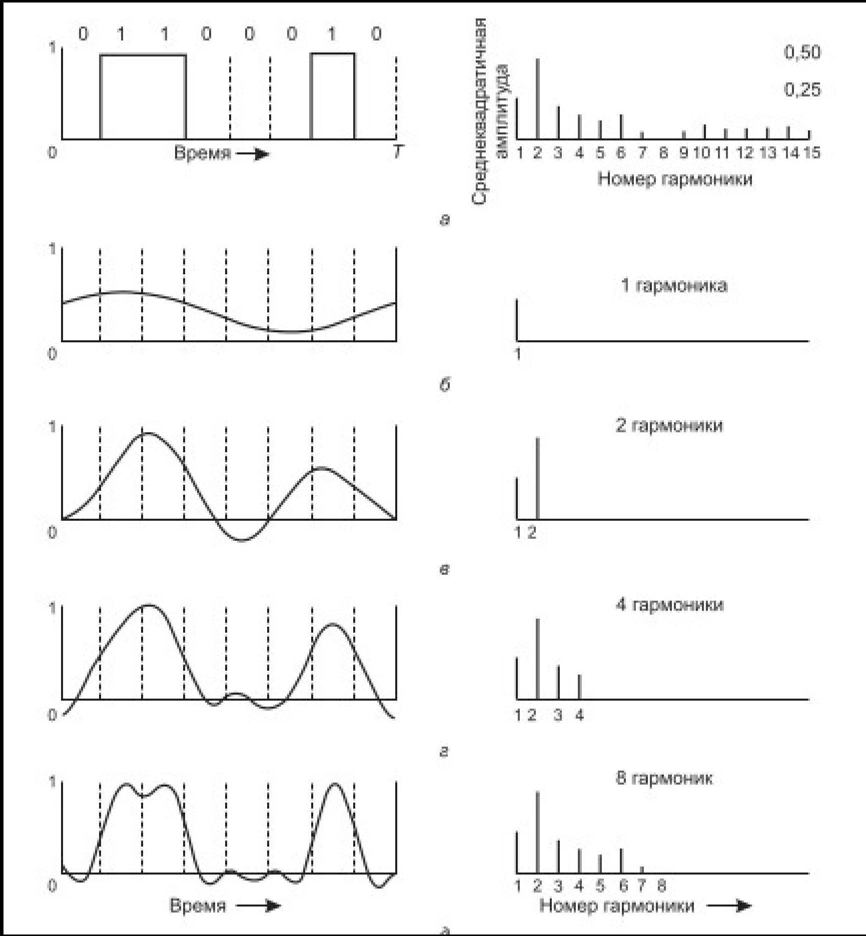
$$sinc(x) = \frac{sin x}{x}$$

$0 < \Delta \leq \frac{1}{2f_c}$ интервал дискретизации

$x(k\Delta)x(k\Delta).$ Дискретные отсчёты сигнала

Владимир Александрович
Котельников
1908-2005

Передача данных по каналу связи



Число гармоник зависит от скорости передачи данных по каналу связи

Таблица 2. 1. Соотношение между скоростью передачи данных и числом гармоник для нашего примера

Бит/с	Т, мс	1-я гармоника, Гц	Количество пропускаемых гармоник
300	26,67	37,5	80
600	13,33	75	40
1200	6,67	150	20
2400	3,33	300	10
4800	1,67	600	5
9600	0,83	1200	2
19 200	0,42	2400	1
38 400	0,21	4800	0

$$a_n = \frac{1}{\pi n}\left[\cos(\pi n/4) - \cos(3\pi n/4) + \cos(5\pi n/4) - \cos(7\pi n/4)\right];$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\left[\sin(3\pi n/4) - \sin(\pi n/4) + \sin(7\pi n/4) - \sin(6\pi n/4\right];$$

$$c = 3/4.$$

Максимальная скорость передачи данных по каналу связи
Формула Шеннона (Теорема Шеннона - Хартли)

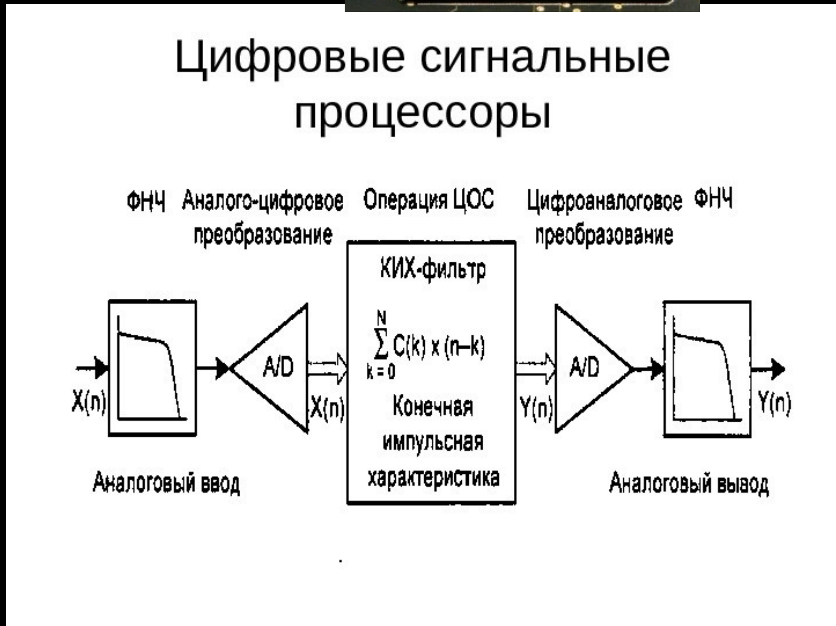
$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$ бит в секунду

C — пропускная способность канала

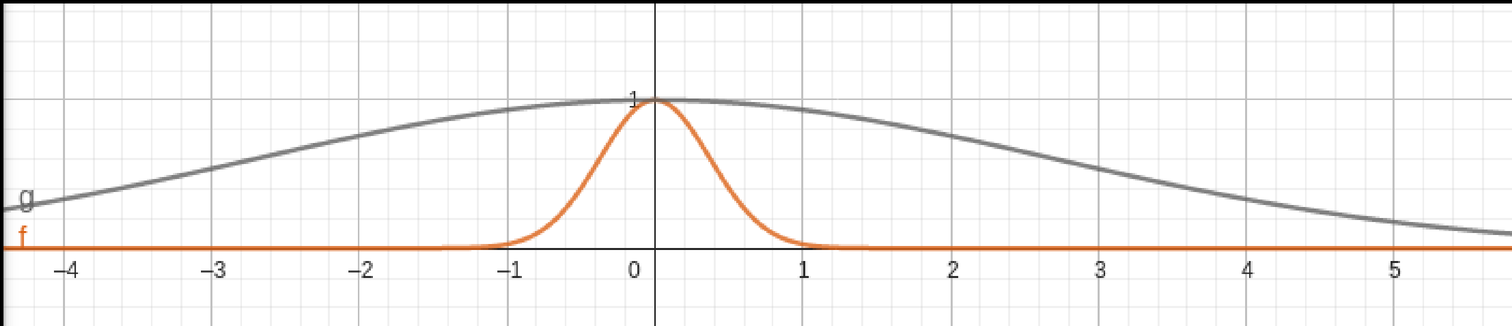
B — полоса часто Гц канала

S — мощность сигнала

N — мощность нормального шума



Преобразование колокола. Принцип неопределенности



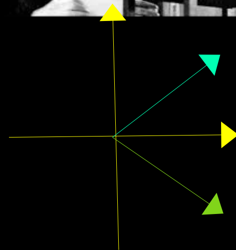
$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-at^2} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - i\omega t}\, dt.$$

$$-at^2 - i\omega t = -a\left(t^2 + \frac{i\omega}{a} t\right) = -a\left(t + \frac{i\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

$\Delta t\ \Delta w = 8$ $\Delta p\ \Delta x \sim h / 2\pi$ $1{,}05\ 10^{-27}$ эрг * сек

Заключение

Гильбертово пространство



$$1, cos\frac{\pi x}{l}, sin\frac{\pi x}{l}, cos\frac{2\pi x}{l}, sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots cos\frac{k\pi x}{l}, sin\frac{k\pi x}{l} \ldots$$

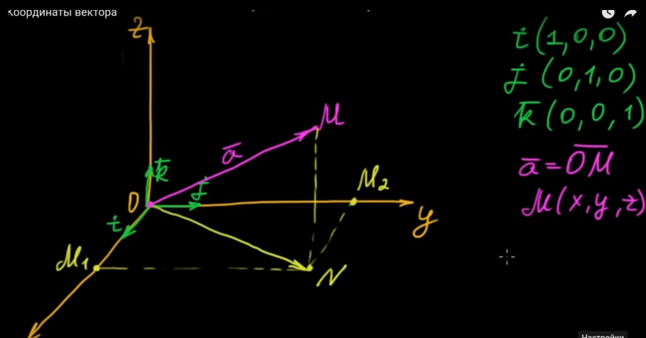
w_0, w_1, w_k,

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + a_3 g_3(x) \ldots + a_n g_n(x) = \sum a_k g_k(x)$ | $g_k(x)^*$ и усреднить

$$a_k = \frac{\langle f(x) g(x)^* \rangle_a^b}{\langle g(x) g(x)^* \rangle_a^b}$$

$$\mathbf{A} = a_1\, \mathbf{e_1} + a_2\, \mathbf{e_2} + \ldots a_n\, \mathbf{e_n} \ldots ?$$



Гильбертово пространство и квантовая механика

$$\langle f|g\rangle \equiv \int d\tau f^* g$$

$$A = (\overline{A})^T = A^* = A^\dagger$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{bmatrix}$$

$$\langle f|g\rangle = 0 \Longleftrightarrow \int d\tau f^* g = 0$$

Ортогональная функция

$$\langle \psi_n|A\psi_n\rangle = a_n \langle \psi_n|\psi_n\rangle$$

aX = Y = AX

Собственное значение w_n

$$a_n = \frac{\langle \psi_n|A\psi_n\rangle}{\langle \psi_n|\psi_n\rangle}$$

$$\langle \psi_n|\psi_m\rangle \equiv \int d\tau \psi_n^* \psi_m = 0$$

$$(a_m - a_n)\langle \psi_n|\psi_m\rangle = 0$$

Разложение произвольной f

$$f = \sum_n c_n \psi_n$$

$$c_n = \langle \psi_n | f \rangle$$

$$f = \sum_n \langle \psi_n | f \rangle \, \psi_n$$

$\mathbf{A} = a_1\, a_1 + a_2\, a_2 + a_3\, a_3 + \ldots\, a_\infty\, a_\infty$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inwt}$$

$$c_k = \left\langle f(t) e^{-iwt} \right\rangle_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$f(t) = \sum \left\langle f(t) e^{-iwt} \right\rangle e^{inwt}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-iwt} dt$$